ACADEMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

– SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC –

THESE

présentée à l'Université de Montpellier II Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le diplôme de DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques (Analyse convexe)
Formation doctorale : Mathématiques et Mécanique Théorique

CONTRIBUTION AUX PROBLEMES DE CONVERGENCE DES FONCTIONS VECTORIELLES ET DES INTEGRALES FONCTIONNELLES

par

Vincent JALBY

Soutenue le 8 Décembre 1993 à 16 heures devant le Jury composé de :

M. VALADIER Michel	Professeur, Université Montpellier II	Président
M. BALDER Erik	Professeur, Université de Utrecht	Rapporteur
M. THÉRA Michel	Professeur, Université de Limoges	Rapporteur
M. ATTOUCH Hedy	Professeur, Université Montpellier II	Examinateur
M. THIBAULT Lionel	Professeur, Université Montpellier II	Examinateur
M. CASTAING Charles	Professeur, Université Montpellier II	Directeur de Thèse

Cette thèse a été composée à l'aide de l'$\mathcal{AMS}$-TEX ,
le système de macros TEX *de l'American Mathematical Society.*

A la mémoire de ma mère.

I'm running towards nothing,
again, and again, and again . . .

R.S.

REMERCIEMENTS

Monsieur Charles Castaing a été mon Directeur de Thèse pendant plus de trois années. Le qualité de sa direction, sa rigueur scientifique et son amitié m'ont permis de mener à bien mes recherches. Qu'il trouve ici l'expression de ma considération et mes sincères remerciements.

Je remercie très vivement Monsieur Erik Balder et Monsieur Michel Théra pour l'intéret qu'ils ont très tôt porté à mon travail et pour avoir accepté d'en être rapporteurs.

Je suis très reconnaissant à Monsieur Michel Valadier, pour toute l'aide qu'il m'a apportée durant l'élaboration de cette thèse. En particulier, je le remercie pour ses précieux commentaires sur les précédentes versions de mes travaux et pour l'attention particulière qu'il a portée sur celles-ci.

Je suis très heureux que Monsieur Hedy Attouch et Monsieur Lionel Thibault aient accepté de faire partie du Jury de cette thèse. Durant mes trois années de Doctorat, leurs commentaires et remarques sur mes travaux et exposés m'ont grandement permis d'améliorer mes résultats.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du Laboratoire d'Analyse Convexe de Montpellier, en particulier Madame Marie-France Nouguès, Monsieur Jean Saint-Pierre, Monsieur Gérard Michaille ainsi que les jeunes chercheurs du département de Mathématiques de Montpellier, en particulier Mademoiselle Aicha Syam, Mademoiselle Fatima Ezzaki, Monsieur Frédéric Mangolte pour les nombreuses discussions que nous avons eues.

Cette thèse n'aurait pu être menée à bien sans la précieuse collaboration de Mademoiselle Lacan qui s'est chargée de nombreux points techniques. Qu'elle trouve ici mes sincères remerciements.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les travaux exposés dans cette thèse se regroupent suivant trois axes : la convergence des fonctions *Bochner-intégrables*, la convergence des *intégrales fonctionnelles* et la convergence des *applications vectorielles*.

Les idées et techniques qui y sont utilisées et développées ont de nombreux points communs : utilisation de l'*analyse multivoque*, de l'*analyse variationnelle*, d'*approximations lipschitziennes*, de la notion de *tension* ("tightness") ... En toile de fond, des problèmes de *mesurabilité*, de *semi-continuité* et, bien sûr, de *convergence* se retrouvent dans l'ensemble de ces travaux.

Bien que les *mesures de Young* ne soient jamais explicitement utilisées, on fait appel à de nombreuses techniques issues de cette théorie et inspirées par la lecture de [Ba1-5] et [V6-9].

Les trois premiers chapitres sont indépendants. Les chapitres III et IV sont fortement liés : le quatrième donnant des applications stochastiques aux résultats du troisième.

La thèse est organisée comme suit :

Le chapitre I est en partie issu d'un travail fait en collaboration avec E. Balder et M. Girardi ([BGJ]). Il traite de problèmes de convergence des suites de fonctions dans L^1_E. Pour cela, on utilise un critère de restriction d'oscillations introduit par M. Girardi dans [Gi1]. On y étudie successivement les relations entre convergence faible, convergence forte, convergence en mesure et convergence limitée.

Le chapitre II expose un travail fait en collaboration avec C. Castaing. On s'intéresse à l'épi-convergence des fonctionnelles intégrales définies sur l'espace des mesures à variation bornée, dans le même esprit que [GS] et [Re]. De telles fonctionnelles apparaissent dans la théorie de la rafle sous la forme d'intégrale de fonction support d'une multifonction. Cela nous a amené à étudier la convergence des multifonctions d'une part, et à appliquer nos résultats à des problèmes de stabilité dans la rafle du premier et du second ordre, d'autre part.

Dans les chapitres III et IV, on s'intéresse aux applications à valeurs dans un treillis de Banach.

Le chapitre III traite de l'approximation lipschitzienne des applications vectorielles. Ce problème nous a été inspiré par le récent résultat de A. Gavioli ([Ga]) concernant l'approximation des multifonctions. Dans le but d'obtenir une approximation, et à l'aide des travaux de J.M. Borwein, J.P. Penot et M. Théra, on étudie la semi-continuité inférieure des applications vectorielles. Par la suite, dans le même esprit que [A], on s'intéresse à la convergence des applications vectorielles.

Dans le chapitre IV, on utilise les résultats et les outils développés au précédent chapitre pour obtenir des résultats de convergence du type *loi forte des grands nombres* et *théorème ergodique* pour des intégrandes vectoriels, ainsi qu'une caractérisation de leur espérance conditionnelle.

Une conclusion générale explicitant certains problèmes rencontrés et d'autres points non encore explorés, termine la thèse.

Par commodité, les références bibliographiques des quatre chapitres ont été regroupées à la fin de la thèse.

Les références à un résultat d'un autre chapitre sont précédées du numéro du chapitre en chiffres romains : la proposition 2.3 du chapitre III est citée "Proposition 2.3" au sein du chapitre III, mais "Proposition III.2.3" dans tous les autres.

CHAPITRE I

CRITÈRES DE CONVERGENCE DANS L^1_E

1. Introduction.

Récemment, M. Girardi ([Gi1], [Gi2]) a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble faiblement compact de $L^1_{\mathbb{R}}$ soit fortement compact ; cette condition se présente sous la forme d'un critère de restriction d'oscillations : *le critère Bocce*. Dans [Ba5], E.J. Balder donne une version séquentielle du résultat de M. Girardi via les mesures de Young. Dans [V8], M. Valadier a étudié plus précisément différents critères. Plus récemment, B. Bernoussi ([Br]) a obtenu un certain nombre de résultats dans la même veine que [Gi1]. On peut aussi citer les travaux bien antérieurs de J.K. Brooks et N. Dinculeanu ([BD1], [BD2]).

Dans ce chapitre, on reprend des résultats contenus dans [BGJ] et [Jb] : on donne des variations du critère Bocce et on étudie leurs relations avec la convergence forte et la convergence en mesure dans l'espace L^1_E. Finalement, via la notion de convergence limitée, on donne des versions faibles des critères de restriction d'oscillations.

2. Notations. Critères de restriction d'oscillations.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé complet. On note $\mathcal{F}^+$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ de mesure strictement positive et pour $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}^+(A)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}^+$ inclus dans A. Pour tout $A \in \mathcal{F}$, 1_A représente la fonction caractéristique de A. Soit E un espace de Banach séparable de norme $\|\cdot\|$ et $\overline{B}(x,r)$ la boule fermée de E de centre x et de rayon r. On note $L^1_E(\Omega)$ l'espace des (classes d') applications Bochner intégrables de Ω dans E.

On rappelle qu'un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de L^1_E est dit *uniformément intégrable* si

$$\lim_{c \to +\infty} \sup_{u \in \mathcal{H}} \int_{[\|u\| \geq c]} \|u\| \, d\mu = 0 \,.$$

Ceci est équivalent à

$$\sup_{u \in \mathcal{H}} \|u\|_{L^1} < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\mu(A) \to 0} \sup_{u \in \mathcal{H}} \int_A \|u\| \, d\mu = 0 \,.$$

Définition 2.1. Pour tout $A \in \mathcal{F}$ et $u \in L^1_E$, on définit respectivement, la *moyenne* et l'*oscillation de Bocce* de u sur A par

$$m_A(u) := \frac{1}{\mu(A)} \int_A u \, d\mu$$
$$\text{Bocce-osc}\, u\big|_A := \frac{1}{\mu(A)} \int_A \|u - m_A(u)\| \, d\mu \ ,$$

avec la convention $0/0 = 0$.

Remarque 2.2. On a les inégalités suivantes ([V8]) :

$$\|m_A(u) - m_A(v)\| \leq \|1_A u - 1_A v\|_{L^\infty}$$
$$\int_A \|m_A(u) - m_A(v)\| \, d\mu \leq \|1_A u - 1_A v\|_{L^1} \ .$$

De plus, l'application $A \longmapsto \mu(A)\, \text{Bocce-osc}\, u\big|_A$ est croissante ([Gi1, Remark 2.4]).

Définition 2.3. On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de L^1_E est *tendu* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une multifonction Γ_ε (de graphe) mesurable de Ω dans les compacts non vides de E, telle que

$$\forall u \in \mathcal{H}, \quad \mu\left(\{\omega \in \Omega : u(\omega) \notin \Gamma_\varepsilon(\omega)\}\right) \leq \varepsilon \ .$$

Remarque 2.4. Sans perdre de la généralité, on peut supposer que pour tout $\omega \in \Omega$, $\Gamma(\omega)$ est un convexe compact de E contenant 0 ([CV]).

On présente à présent divers critères de restriction d'oscillations.

Définition 2.5. Soit $(u_n)_n$ une suite de L^1_E.

La suite (u_n) vérifie le *critère Bocce* si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $B \in \mathcal{F}^+$, il existe $C \in \mathcal{F}^+(B)$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\text{Bocce-osc}\, u_n\big|_C \leq \varepsilon \ , \tag{Bo}$$

pour tout $n \geq N$.

La suite (u_n) vérifie le *critère* (B1) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et une partition mesurable $(A_i)_{i=0}^p$ de Ω avec $\mu(A_0) < \varepsilon$ tels que

$$\text{Bocce-osc}\, u_n\big|_{A_i} \leq \varepsilon \ , \tag{B1}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $n \geq N$.

La suite (u_n) vérifie le *critère* (B2) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition mesurable $(A_i)_{i=0}^p$ de Ω avec $\mu(A_0) < \varepsilon$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $C \in \mathcal{F}^+(A_i)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ avec

$$\text{Bocce-osc}\, u_n\big|_C \leq \varepsilon \ , \tag{B2}$$

pour tout $n \geq N$.

Ces trois critères ont les versions "limites" plus faibles suivantes :

Définition 2.6. Soit $(u_n)_n$ une suite de L^1_E.

La suite (u_n) vérifie le *critère Bocce séquentiel* si pour toute sous-suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$, tout $B \in \mathcal{F}^+$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathcal{F}^+(B)$ tel que

$$\liminf_{k\to\infty} \text{Bocce-osc}\, u_{n_k}\big|_C \leq \varepsilon \ . \tag{seq-Bo}$$

La suite (u_n) vérifie le *critère* (B1) *séquentiel* si pour toute sous-suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition mesurable $(A_i)_{i=0}^p$ de Ω avec $\mu(A_0) < \varepsilon$ telle que

$$\liminf_{k\to\infty} \text{Bocce-osc}\, u_{n_k}\big|_{A_i} \leq \varepsilon \ , \tag{seq-B1}$$

pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$.

La suite (u_n) vérifie le *critère* (B2) *séquentiel* si pour toute sous-suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition mesurable $(A_i)_{i=0}^p$ de Ω avec $\mu(A_0) < \varepsilon$ telle que

$$\liminf_{k\to\infty} \text{Bocce-osc}\, u_{n_k}\big|_C \leq \varepsilon \ , \tag{seq-B2}$$

pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$ et tout $C \in \mathcal{F}^+(A_i)$.

Remarque 2.7. Un critère du type (Bo) a été introduit par M. Girardi dans [Gi1]. Le critère (Bo) donné ici est dû à M. Valadier ([V8]). Le critère (seq-Bo) est dû à E.J. Balder ([Ba5]). Dans la suite, un *critère de restriction d'oscillations* référera à un critère quelconque des définitions 2.5 et 2.6.

Proposition 2.8. *Pour toute suite de L^1_E, on a les relations suivantes* :

$$\text{(B2)} \implies \text{(Bo)} \iff \text{(B1)}$$
$$\text{(seq-B2)} \implies \text{(seq-Bo)} \iff \text{(seq-B1)}$$

Preuve. Montrons d'abord (B2) $\Longrightarrow$ (Bo) : soit $(u_n)_n$ une suite de L^1_E vérifiant (B2), $\varepsilon > 0$, $B \in \mathcal{F}^+$, $\varepsilon' = \inf\{\varepsilon, \mu(B)\}$ et $(A_i)_{i=0}^p$ la partition donnée par (B2) pour ε'. Comme $\mu(A_0) < \varepsilon' \leq \mu(B)$, on a $\mu(B \setminus A_0) > 0$. Il existe donc $i_0 >$ tel que $\mu(B \cap A_{i_0}) > 0$. Il est alors facile de voir que (Bo) est vérifié pour $C = B \cap A_{i_0}$.

Montrons à présent que (Bo) $\Longrightarrow$ (B1) : soit $(u_n)_n$ une suite de L^1_E vérifiant (Bo) et $\varepsilon > 0$. Il existe donc $C \in \mathcal{F}^+$ et $N_C \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N_C$,

$$\text{Bocce-osc}\, u_n\big|_C \leq \varepsilon \ . \tag{2.8.1}$$

Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des $C \in \mathcal{F}^+$ vérifiant (2.8.1), j_1 le plus petit entier tel qu'il existe $C \in \mathcal{E}_1$ avec $\mu(C) \geq 1/j_1$ et B_1 un tel C. On construit alors des éléments B_k de $\mathcal{F}^+$ et des entiers j_k par récurrence :

Si $\mu(\cup_{i=1}^{k-1} B_i) \leq 1-\varepsilon$, soit $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des $C \in \mathcal{F}^+\left(\Omega \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} B_i)\right)$ vérifiant (2.8.1), j_k le plus petit entier tel qu'il existe $C \in \mathcal{E}_k$ avec $\mu(C) \geq 1/j_k$ et B_k un tel C.

Il existe p assez grand, tel que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{p} B_i\right) > 1-\varepsilon \; . \tag{2.8.2}$$

Sinon, on pourrait construire une suite $(B_k, j_k) \in \mathcal{F}^+ \times \mathbb{N}$. Soit alors $C \in \mathcal{F}^+(\Omega \setminus \cup_{i=1}^{\infty} B_i)$. Comme Ω est de mesure fini, la suite $(j_k)_k$ convergerait vers l'infini. Il existerait donc q tel que $\mu(C) > 1/(j_q-1)$. Comme $C \in \mathcal{E}_q$, cela contredirait la construction de j_q.

En utilisant alors (2.8.2), il est facile de voir que la suite $(u_n)_n$ vérifie (B1) avec $A_0 = \Omega \setminus (\cup_{i=1}^{p} Bi)$, $A_1 = B_1, \ldots,$ $A_p = B_p$ et $N = \sup\{N_{B_i} : i = 1, \ldots, p\}$.

Finalement, montrons que (B1) $\Longrightarrow$ (Bo) : soit $B \in \mathcal{F}^+$ et $1 > \varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ et une partition mesurable $(A_i)_{i=0}^{p}$ de Ω avec $\mu(A_0) < \frac{\varepsilon}{2}\mu(B)$ tels que

$$\text{Bocce-osc}\, u_n\big|_{A_i} \leq \frac{\varepsilon}{2}\mu(B) \tag{2.8.3}$$

pour tout $n \geq N$ et tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. Soit $\mathbb{I} = \{i \in \{1, \ldots, p\} : \mu(A_i \cap B) > 0\}$. Il est clair que $\mathbb{I}$ est non vide. Supposons que quelque soit $i \in \mathbb{I}$, $(u_n)_n$ ne vérifie pas (Bo) avec $C = A_i \cap B$. Il existe donc une sous-suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ telle que

$$\text{Bocce-osc}\, u_{n_k}\big|_{A_i \cap B} > \varepsilon \tag{2.8.4}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{I}$. En utilisant (2.8.4), la croissance de l'application $A \longmapsto \mu(A)\, \text{Bocce-osc}\, u\big|_A$ et (2.8.3), on obtient la contradiction suivante :

$$\begin{aligned}
\varepsilon\mu(B) &= \sum_{i \in \mathbb{I} \cup \{0\}} \varepsilon\mu(A_i \cap B) \\
&< \varepsilon\mu(A_0 \cap B) + \sum_{i \in \mathbb{I}} \mu(A_i \cap B)\, \text{Bocce-osc}\, u_{n_k}\big|_{A_i \cap B} \\
&\leq \varepsilon\mu(A_0) + \sum_{i \in \mathbb{I}} \mu(A_i)\, \text{Bocce-osc}\, u_{n_k}\big|_{A_i} \\
&< \frac{\varepsilon^2}{2}\mu(B) + \sum_{i \in \mathbb{I}} \frac{\varepsilon}{2}\mu(A_i)\mu(B) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\mu(B) + \frac{\varepsilon}{2}\mu(B) = \varepsilon\mu(B) \; .
\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe $C = A_i \cap B \in \mathcal{F}^+$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\text{Bocce-osc}\, u_n\big|_C \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, et donc que (u_n) vérifie (Bo).

La preuve de (seq-B2) $\Longrightarrow$ (seq-Bo) $\Longleftrightarrow$ (seq-B1) est similaire. $\square$

3. Convergence forte dans L^1_E.

Dans cette partie, on montre que les critères de restriction d'oscillations sont des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite tendue faiblement convergente de $L^1_E(\Omega)$ soit fortement convergente. Pour $E = \mathbb{R}$, le résultat est connu ([Gi1], [Gi2], [Ba5], [V8]). Dans [BGJ], le résultat est démontré lorsque E est un espace de Banach quelconque en utilisant des techniques proches de la théorie des mesures de Young. On propose ici une preuve différente inspirée de [Gi1], [V8], [Jb].

Théorème 3.1. *Une suite $(u_n)_n$ de $L^1_E(\Omega)$ converge fortement vers $u \in L^1_E(\Omega)$ si et seulement si*

(1) *la suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers u* ;
(2) *la suite $(u_n)_n$ vérifie un critère de restriction d'oscillations* ;
(3) *la suite $(u_n)_n$ est tendue.*

Pour démontrer ce résultat, on utilisera les lemmes suivants :

Lemme 3.2. *Une suite de $L^1_E(\Omega)$ qui converge en mesure est tendue.*

Preuve. Soit $(u_n)_n$ une suite de $L^1_E(\Omega)$ qui converge en mesure vers $u_0 \in L^1_E(\Omega)$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, considérons $\lambda_n = u_n\mu$ la mesure positive bornée sur E image de μ par l'application mesurable $u_n \colon \Omega \longmapsto E$. Comme E est un espace de Radon (puisqu'il est séparable), λ_n est une mesure de Radon. Pour toute fonction continue bornée $\phi \in \mathcal{C}^b(E)$, on a

$$\lambda_n(\phi) = \int_\Omega \phi\left(u_n(\omega)\right)\, d\mu(\omega)\ . \tag{3.2.1}$$

Il est facile de voir que la convergence en mesure de $(u_n)_n$ vers u entraîne la converge étroite de $(\lambda_n)_n$ vers λ_0. Sinon, il existerait $\phi \in \mathcal{C}^b(E)$ et une sous-suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ convergeant μ-presque partout vers u_0 et tels que $\lambda_{n_k}(\phi)$ ne converge pas vers $\lambda_0(\phi)$. D'après (3.2.1), ceci contredit le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. La suite $(\lambda_n)_n$ est donc tendue dans l'espace des mesures de Radon sur E ([DM, III.59]), ce qui implique que la suite $(u_n)_n$ est tendue dans L^1_E. $\square$

Le lemme suivant généralise un résultat antérieur de C. Castaing ([C2]).

Lemme 3.3. *Soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble de $L^1_E(\Omega)$ uniformément intégrable et tendu. Alors $\Delta_B := \{m_B(f) : f \in \mathcal{H}\}$ est relativement fortement compact dans E pour tout $B \in \mathcal{F}^+$.*

Preuve. Comme pour tout $B \in \mathcal{F}^+$, l'ensemble $\{1_B u : u \in \mathcal{H}\}$ est aussi uniformément intégrable et tendu, il suffit de montrer que Δ_Ω est relativement fortement compact.

Fixons $\delta > 0$. Grâce à l'uniforme intégrabilité de $\mathcal{H}$, il existe $\alpha > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $A \in \mathcal{F}$ de mesure inférieure à ε, on ait

$$\sup_{u\in\mathcal{H}} \int_A \|u\|\, d\mu \le \delta/2 \quad \text{et} \quad \sup_{u\in\mathcal{H}} \int_{[\|u\|>\alpha]} \|u\|\, d\mu \le \delta/2\ .$$

Soit Γ_ε le multifonction donnée par la définition 2.3 et $\Lambda_\varepsilon^\alpha = \Gamma_\varepsilon \cap \overline{B}(0,\alpha)$. Comme $\Lambda_\varepsilon^\alpha$ est à valeurs convexes compactes et est intégralement bornée (i.e. $\|\Lambda_\varepsilon^\alpha\| = \sup\{\|x\| : x \in \Lambda_\varepsilon^\alpha(\cdot)\} \in L^1_{\mathbb{R}+}(\Omega)$), le sous-ensemble $K_\varepsilon^\alpha = \{\int_\Omega \Lambda_\varepsilon^\alpha \, d\mu\}$ est convexe et compact dans E ([CV, Theorem V.15]). Pour $u \in \mathcal{H}$, soit à présent $A_u^\varepsilon = \{\omega \in \Omega : u(\omega) \in \Gamma_\varepsilon(\omega)\}$. On a $\mu(\Omega \setminus A_u^\varepsilon) < \varepsilon$. Comme pour tout $u \in \mathcal{H}$,

$$\int_{[\|u\| \leq \alpha]} u 1_{A_u^\varepsilon} \, d\mu \in K_\varepsilon^\alpha \ ,$$

l'ensemble $\Delta_\Omega^{\varepsilon,\alpha} := \{\int_{[\|u\| \leq \alpha]} u 1_{A_u^\varepsilon} \, d\mu : u \in \mathcal{H}\}$ est relativement compact dans E. De plus, la distance entre $\Delta_\Omega^{\varepsilon,\alpha}$ et Δ_Ω est au plus δ puisque

$$\| \int_\Omega u \, d\mu - \int_{[\|u\| \leq \alpha]} u 1_{A_u^\varepsilon} \, d\mu \| \leq \int_{[\|u\| > \alpha]} \|u\| \, d\mu + \int_\Omega \|u 1_{\Omega \setminus A_u^\varepsilon}\| \, d\mu \leq \delta$$

pour tout $u \in \mathcal{H}$. On en déduit que Δ_Ω est relativement fortement compact dans E. $\square$

Lemme 3.4. *Pour tout $u \in L^1_E(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition mesurable $(A_i)_{i=0}^p$ de Ω avec $\mu(A_0) < \varepsilon$ telle que*

$$\text{Bocce-osc}\, u\big|_A \leq \varepsilon$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $A \in \mathcal{F}^+(A_i)$.

Preuve. Soit $u \in L^1_E(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. D'après la mesurabilité de u ([DU, Corollary II.1.3]), il existe une fonction v mesurable dénombrablement étagée telle que $\|u - v\|_{L^\infty} < \varepsilon/2$. La fonction v est de la forme $\sum_{i=1}^\infty x_i A_i$ où $x_i \in E$ et $(A_i)_i$ est une $\mathcal{F}^+$-partition de Ω. Pour p assez grand, on a $\mu(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^p A_i) < \varepsilon$. On pose $A_0 = \bigcup_{i=1}^p A_i$. On a alors pour tout $i \in \{1, \ldots p\}$ et tout $A \in \mathcal{F}^+(A_i)$,

$$\text{Bocce-osc}\, v\big|_A = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{Bocce-osc}\, u\big|_A &\leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A \|u - v\| \, d\mu + \text{Bocce-osc}\, v\big|_A \\ &\quad + \frac{1}{\mu(A)} \int_A \|m_A(v) - m_A(u)\| \, d\mu \\ &\leq \varepsilon/2 + 0 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme. $\square$

Finalement, on donne un lemme assez élémentaire.

Lemme 3.5. *Soit $(\boldsymbol{X}, d)$ un espace métrique complet et $(X_k)_k$ une suite de $\boldsymbol{X}$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de $\boldsymbol{X}$ vérifiant*

$$\liminf_{k\to\infty} d\left(X_k, K_\varepsilon\right) \leq \varepsilon \ .$$

Alors la suite $(X_k)_k$ admet une sous-suite convergeant dans $\boldsymbol{X}$.

Preuve. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon = 1/p$. Par hypothèse, il existe un compact K_p de $\boldsymbol{X}$ et une sous-suite $(X_{\tau_p(k)})_k$ de $(X_k)_k$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$d\left(X_{\tau_p(k)}, K_p\right) \leq 2/p \ .$$

Il existe donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ un élément $Y^p_{\tau_p(k)}$ de K_p tel que

$$d\left(X_{\tau_p(k)}, Y^p_{\tau_p(k)}\right) \leq 4/p \ .$$

Comme K_p est compact, on peut extraire de $(Y^p_{\tau_p(k)})_k$ une sous-suite $(Y^p_{\tau'_p(k)})_k$ qui converge dans K_p. Sans perdre de la généralité, on peut supposer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $(Y_{\tau'_{p+1}(k)})_k$ est une sous-suite de $(Y_{\tau'_p(k)})_k$. Considérons alors la suite diagonale $(X_r)_r = (X_{\tau'_r(r)})_r$. Il suffit de montrer que $(X_r)_r$ est une suite de Cauchy dans $\boldsymbol{X}$: soit $\delta > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 16/\delta$. On a

$$\begin{aligned} d\left(X_r - X_s\right) &\leq d\left(X_{\tau'_r(r)}, Y^p_{\tau'_r(r)}\right) + d\left(Y^p_{\tau'_r(r)}, Y^p_{\tau'_s(s)}\right) + d\left(Y^p_{\tau'_s(s)}, X_{\tau'_s(s)}\right) \\ &\leq 4/p + d\left(Y^p_{\tau'_r(r)}, Y^p_{\tau'_s(s)}\right) + 4/p \\ &\leq \delta/2 + d\left(Y^p_{\tau'_r(r)}, Y^p_{\tau'_s(s)}\right) \ . \end{aligned}$$

Comme la suite $(Y^p_{\tau'_k(k)})_k$ converge dans K_p, pour r et s assez grands, on a $d\left(X_r - X_s\right) \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta$. On en déduit que $(X_r)_r$ est une suite de Cauchy dans $\boldsymbol{X}$. $\square$

Preuve du théorème 3.1. Soit $(u_n)_n$ une suite de $L^1_E(\Omega)$ qui converge fortement vers $u \in L^1_E(\Omega)$. Il est clair qu'elle converge faiblement vers u et d'après le lemme 3.2, elle est tendue. Montrons qu'elle vérifie le critère le plus fort : (B2). Soit $\varepsilon > 0$ et $(A_i)_{i=0}^p$ la partition donnée par le lemme 3.4 avec $\varepsilon/3$. Fixons $i \in \{1, \dots, p\}$ et $A \in \mathcal{F}^+(A_i)$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\left\|u_n - u\right\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{3}\mu(A)$. On a alors pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \text{Bocce-osc}\, u_n\big|_A &\leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A \|u_n - u\|\, d\mu + \text{Bocce-osc}\, u\big|_A \\ &\qquad + \frac{1}{\mu(A)} \int_A \|m_A(u) - m_A(u_n)\|\, d\mu \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Montrons à présent la réciproque : soit (u_n) une suite tendue convergeant faiblement vers u dans $L^1_E(\Omega)$ et vérifiant le critère le plus faible : (seq-B1). Il suffit de montrer que de toute sous-suite de (u_n) on peut extraire une sous-suite qui converge fortement vers u.

Soit $(u_k)_k$ une sous-suite de $(u_n)_n$ et $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(u_k)_k$ est uniformément intégrable ([BD1]), il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mu(A) < \delta \implies \sup_k \int_A \|u_k\| \, d\mu \leq \varepsilon/2 \ . \tag{3.1.1}$$

Par le critère (seq-B1), il existe une partition mesurable $(A_i)_{i=0}^p$ de Ω avec $\mu(A_0) < \delta$ et tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{A_i} \|u_k - m_{A_i}(u_k) 1_{A_i}\| \, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} \mu(A_i) \ .$$

En sommant sur $i \in \{1, \ldots, p\}$, on trouve

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus A_0} \|u_k - \sum_{i=1}^p m_{A_i}(u_k) 1_{A_i}\| \, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} \mu(\Omega \setminus A_0) \leq \varepsilon/2 \ . \tag{3.1.2}$$

D'autre part, par (3.1.1), pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{A_0} \|u_k - \sum_{i=1}^p m_{A_i}(u_k) 1_{A_i}\| \, d\mu = \liminf_{k\to\infty} \int_{A_0} \|u_k\| \, d\mu \leq \varepsilon/2 \ . \tag{3.1.3}$$

En regroupant (3.1.2) et (3.1.3), on trouve

$$\liminf_{k\to\infty} \|u_k - \sum_{i=1}^p m_{A_i}(u_k) 1_{A_i}\|_{L^1} \leq \varepsilon \ .$$

Montrons que $K_\varepsilon := \{\sum_{i=1}^p m_{A_i}(u_k) 1_{A_i} : k \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact : d'après le lemme 3.3, les ensembles $\Delta_{A_i} := \{m_{A_i}(u_k) : k \in \mathbb{N}\}$ sont relativement compacts pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. De plus,

$$K_\varepsilon \subset \sum_{i=1}^p \Delta_{A_i} 1_{A_i} \ .$$

On en déduit la relative compacité de K_ε. Le lemme 3.4 permet alors de conclure que (u_k) possède une sous-suite convergeant fortement dans $L^1_E(\Omega)$ vers $v \in L^1_E(\Omega)$. De plus, comme elle converge faiblement vers u, on en déduit que $u = v$. Ce qui finit la preuve. $\square$

4. Convergence en mesure dans L^1_E.

Dans cette partie, on relie les critères de restriction d'oscillations avec la convergence en mesure dans $L^1_E(\Omega)$. Pour cela, on utilisera le *Biting Lemma* qu'on rappelle ci-dessous ([C8]).

Lemme 4.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée dans $L^1_E(\Omega)$. Alors il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ et une suite croissante $(A_k)_k$ dans $\mathcal{F}$ telles que*

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k) = 1$;
(2) *la suite $(1_{A_k} u_{n_k})_k$ est uniformément intégrable dans $L^1_E(\Omega)$;*
(3) *la suite $(1_{\Omega\setminus A_k} u_{n_k})_k$ converge vers 0 en mesure.*

Théorème 4.2. *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée tendue dans $L^1_E(\Omega)$ vérifiant un critère de restriction d'oscillations. Alors il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ et une suite croissante $(A_k)_k$ dans $\mathcal{F}$ telles que*

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k) = 1$;
(2) *la suite $(1_{A_k} u_{n_k})_k$ converge fortement dans $L^1_E(\Omega)$;*
(3) *la suite $(1_{\Omega\setminus A_k} u_{n_k})_k$ converge vers 0 en mesure.*

En particulier, la suite $(u_{n_k})_k$ converge en mesure.

Preuve. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée dans $L^1_E(\Omega)$ vérifiant le critère le plus faible : (seq-Bo). Appliquons le lemme 4.1. Il suffit alors de montrer que la suite $(1_{A_k} u_{n_k})_k$ vérifie le critère (seq-Bo). En effet, comme elle est tendue et uniformément intégrable, d'après [ACV, Théorème 6], on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente. Le théorème 3.1 permet alors de conclure. Montrons donc que $(1_{A_k} u_{n_k})_k$ vérifie (seq-Bo) : soit une sous-suite de $(1_{A_k} u_{n_k})_k$ encore notée $(1_{A_k} u_{n_k})_k$, $\varepsilon > 0$ et $B \in \mathcal{F}^+$. Comme la suite $(A_k)_k$ croit vers Ω, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\widetilde{B} = B \cap A_{k_0} \in \mathcal{F}^+$. Il existe donc $C \in \mathcal{F}^+(\widetilde{B})$ tel que

$$\liminf_{k\to\infty} \text{Bocce-osc}\, u_{n_k}\big|_C \leq \varepsilon \,. \tag{4.2.1}$$

De plus, pour tout $k \geq k_0$, on a $C \subset \widetilde{B} \subset A_{k_0} \subset A_k$ et donc

$$\text{Bocce-osc}\, u_{n_k}\big|_C = \text{Bocce-osc}\,(1_{A_k} u_{n_k})\big|_C \,.$$

On déduit alors de (4.2.1) que

$$\liminf_{k\to\infty} \text{Bocce-osc}\,(1_{A_k} u_{n_k})\big|_C \leq \varepsilon \,.$$

Ce qui prouve que la suite $(1_{A_k} u_{n_k})_k$ vérifie (seq-Bo). $\square$

On obtient comme corollaire immédiat le résultat suivant :

Proposition 4.3. *Soit $\psi\colon \Omega \times E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ un intégrande normal (i.e., ψ est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$-mesurable et pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $x \longmapsto \psi(\omega, x)$ est semi-continue inférieurement sur E) et $(u_n)_n$ une suite bornée et tendue dans $L^1_E(\Omega)$ vérifiant un critère de restriction d'oscillations. On suppose de plus que la suite des parties négatives $\big([\psi(\cdot, u_n(\cdot))]^-\big)_n$ est uniformément intégrable. Alors il existe $u \in L^1_E(\Omega)$ limite en mesure d'une sous-suite de $(u_n)_n$ tel que*

$$\int_\Omega \psi(\omega, u(\omega))\, d\mu(\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \psi(\omega, u_n(\omega))\, d\mu(\omega)\ .$$

Preuve. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ défini par

$$\alpha := \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \psi(\omega, u_n(\omega))\, d\mu(\omega)\ .$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi(\omega, u_n(\omega))\, d\mu(\omega)\ .$$

D'après le théorème 4.2, la suite $(u_n)_n$ admet une sous-suite qui converge en mesure vers un $u \in L^1_E(\Omega)$. En utilisant alors une extension du lemme de Fatou (c.f., [V6, Theorem 6] ou [Ba1]), on trouve le résultat. $\square$

5. Convergence limitée. Critères faibles.

Dans [BGJ], les critères de restriction d'oscillations sont aussi appliqués à la convergence limitée introduite par E. Balder dans [Ba3].

Définition 5.1. Une suite $(u_n)_n$ de $L^1_E(\Omega)$ converge de façon limitée vers u dans $L^1_E(\Omega)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g\left(\omega, u_n(\omega) - u(\omega)\right)\, d\mu(\omega) = 0\ ,$$

pour toute application $g\colon \Omega \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

(i) g est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$ mesurable ;

(ii) $g(\omega, 0) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$;

(iii) $g(\omega, \cdot)$ est $\sigma(E, E')$-continue pour tout $\omega \in \Omega$;

(iv) $|g(\omega, \cdot)| \leq C\|\cdot\| + \phi(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, pour un $C > 0$ et $\phi \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega)$.

Remarque 5.2. La convergence limitée est plus faible que la convergence forte mais plus forte que la convergence faible. Lorsque E est de dimension finie, la convergence forte et la convergence limitée coïncident ([BGJ]).

Dans [BGJ, Theorem 3.8], il est démontré le résultat suivant :

Théorème 5.3. *On suppose que E' possède la propriété de Radon-Nikodym. Une suite $(u_n)_n$ de $L^1_E(\Omega)$ converge de façon limitée vers u dans $L^1_E(\Omega)$ si et seulement si*

(1) *la suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers u dans $L^1_E(\Omega)$;*
(2) *pour tout $x' \in E$, la suite $(\langle u_n, x'\rangle)_n$ vérifie un critère de restriction d'oscillations.*

Le résultat suivant relie la convergence limitée avec la convergence forte.

Théorème 5.4. *Une suite $(u_n)_n$ de $L^1_E(\Omega)$ converge fortement vers u dans $L^1_E(\Omega)$ si et seulement si $(u_n)_n$ est tendue et converge de façon limitée vers u dans $L^1_E(\Omega)$.*

Des deux précédents résultats découle la nouvelle formulation du théorème 3.1 :

Théorème 5.5. *On suppose que E' possède la propriété de Radon-Nikodym. Une suite $(u_n)_n$ de $L^1_E(\Omega)$ converge fortement vers u dans $L^1_E(\Omega)$ si et seulement si*

(1) *la suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers u dans $L^1_E(\Omega)$;*
(2) *pour tout $x' \in E'$, la suite $(\langle u_n, x'\rangle)_n$ vérifie un critère de restriction d'oscillations ;*
(3) *la suite $(u_n)_n$ est tendue dans $L^1_E(\Omega)$.*

Pour prouver le théorème 5.4, on utilisera le lemme suivant :

Lemma 5.6. *Pour qu'une suite uniformément intégrable $(u_n)_n$ de $L^1_E(\Omega)$ converge fortement vers la fonction nulle, il suffit que pour tout $M \in \mathbb{N}$, la suite des troncatures $(u_n^M)_n$ converge fortement vers la fonction nulle, où $u_n^M := 1_{[\|u_n\| \leq M]} u_n$.*

Preuve. Soit $M > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_n\|_{L^1} \leq \|u_n^M\|_{L^1} + \|u_n - u_n^M\|_{L^1} \leq \|u_n^M\|_{L^1} + \int_{[\|u_n\| > M]} \|u_n\|\, d\mu \,. \tag{5.6.1}$$

Pour tout $\delta > 0$, comme la suite $(u_n)_n$ est uniformément intégrable il existe M assez grand tel que

$$\int_{[\|u_n\| > M]} \|u_n\|\, d\mu < \delta \,.$$

On déduit alors de (5.6.1) que

$$0 \leq \limsup_n \|u_n\|_{L^1} \leq \limsup_n \|u_n^M\|_{L^1} + \delta = \delta \,.$$

D'où le résultat.

Preuve du théorème 5.4. La condition nécessaire provient de la remarque 5.2 et du lemme 3.2. Montrons la condition suffisante. Soit $(u_n)_n$ une suite tendue qui converge de façon limitée dans $L^1_E(\Omega)$. Sans perdre de la généralité, on peut supposer que $u = 0$

et par le lemme 5.6, que les fonctions u_k sont uniformément bornée dans $L^\infty_E(\Omega)$ par un $M > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $\phi_k\colon \Omega \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi_k(\omega, x) = \begin{cases} -\|x\|, & \text{si } x \in \Gamma_k(\omega), \\ M, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où Γ_k est la multifonction donnée par la définition 2.3 avec $\varepsilon = 1/k$. On peut supposer que $0 \in \Gamma_k(\omega) \subset \overline{B}(0, M)$. On pose $A^k_n = \{\omega \in \Omega : u_n(\omega) \in \Gamma_k(\omega)\}$. On a $\mu(\Omega \setminus A^k_n) \leq 1/k$. D'après [Ba4] (voir aussi [DM]), il existe une distance d sur E définissant une topologie τ_d plus faible que la topologie faible de E et telle que (E, τ_d) soit un espace souslinien. En particulier, E muni d'une des trois topologies τ_d, topologie forte ou faible, possède la même tribu borélienne. D'autre part, comme Γ_k est à valeurs fortement compactes, il n'est pas difficile de voir que pour tout $\omega \in \Omega$, $\phi_k(\omega, \cdot)$ est τ_d-semi-continue inférieurement sur E. On peut aussi montrer que ϕ_k est $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(E)$-mesurable ([CV]). Finalement, pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times E$, on a $|\phi_k(\omega, x)| \leq M$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit l'approximation lipschitzienne $\phi^p_k\colon \Omega \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ de ϕ_k par

$$\phi^p_k(\omega, x) := \inf_{y \in E} \{\phi_k(\omega, y) + p\, d(x, y)\} .$$

Il est connu ([V6]) que ϕ^p_k est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(E)$ mesurable et que pour tout $\omega \in \Omega$, $\phi^p_k(\omega, \cdot)$ est d-lipschitzienne et donc $\sigma(E, E')$-continue. De plus, on a pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times E$,

$$\phi_k(\omega, x) = \sup_p \phi^p_k(\omega, x) .$$

On pose alors pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times E$, $\widehat{\phi}^p_k(\omega, x) = \phi^p_k(\omega, x) - \phi^p_k(\omega, 0)$. Pour tout $(k, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\widehat{\phi}^p_n$ vérifie les conditions (i) à (iv) de la définition 5.1. (Remarquons que (iv) est vérifiée puisque $|\widehat{\phi}^p_k(\omega, x)| \leq 2M$.) D'après la convergence limitée de la suite $(u_n)_n$, on obtient pour tout $(k, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \widehat{\phi}^p_k(\omega, u_n(\omega))\, d\mu = 0.$$

On en déduit que

$$\liminf_{n \to \infty} \int_\Omega \phi^p_k(\omega, u_n(\omega))\, d\mu \geq \int_\Omega \phi^p_k(\omega, 0)\, d\mu.$$

Ainsi, pour tout $(k, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a

$$\liminf_{n \to \infty} \int_\Omega \phi_k(\omega, u_n(\omega))\, d\mu \geq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega \phi^p_k(\omega, u_n(\omega))\, d\mu \geq \int_\Omega \phi^p_k(\omega, 0)\, d\mu.$$

On obtient alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\liminf_{n \to \infty} \int_\Omega \phi_k(\omega, u_n(\omega))\, d\mu \geq \sup_p \int_\Omega \phi^p_k(\omega, 0)\, d\mu = \int_\Omega \phi_k(\omega, 0)\, d\mu = 0. \tag{5.4.1}$$

On peut à présent montrer que la suite $(u_n)_n$ converge fortement. Fixons $\delta > 0$. Comme

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|u_n\|\,d\mu &= \int_{A_n^k} \|u_n\|\,d\mu + \int_{\Omega\setminus A_n^k} \|u_n\|\,d\mu \\ &= \int_{A_n^k} \|u_n\|\,d\mu - \int_{\Omega\setminus A_n^k} M\,d\mu + \int_{\Omega\setminus A_n^k} M\,d\mu + \int_{\Omega\setminus A_n^k} \|u_n\|\,d\mu \\ &= -\int_\Omega \phi_k(\omega, u_n(\omega))\,d\mu + M\,\mu(\Omega\setminus A_n^k) + \int_{\Omega\setminus A_n^k} \|u_n\|\,d\mu\end{aligned}$$

et grâce à l'uniforme intégrabilité de la suite $(u_n)_n$, pour k assez grand, on a

$$\int_\Omega \|u_n\|\,d\mu \leq -\int_\Omega \phi_k(\omega, u_n(\omega))\,d\mu + \delta.$$

Ainsi, lorsque n tends vers l'infini, par (5.4.1), on trouve

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \|u_n\|\,d\mu \leq \delta.$$

Ce qui finit la preuve. $\square$

CHAPITRE II

ÉPI-CONVERGENCE DES FONCTIONNELLES INTÉGRALES DÉFINIES SUR L'ESPACE DES MESURES. APPLICATIONS AU PROCESSUS DE RAFLE.

1. Introduction.

Dans ce chapitre, on présente plusieurs résultats d'épi-convergence des fonctionnelles intégrales définies sur l'espace des mesures à variation bornée à valeurs dans un espace de Banach séparable et réflexif. On montre alors que ces résultats sont utiles pour des applications au processus de rafle, introduit par J.J. Moreau ([Mo4]) dans le traitement des systèmes mécaniques élasto-plastiques.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la partie 3, on présente plusieurs nouveaux résultats sur l'épi-convergence des fonctionnelles intégrales définies sur l'espace des mesures à variation bornée, basés sur des résultats classiques obtenus par C. Castaing ([C6]) et Y. Reshetnyak ([Re]). On donne aussi une caractérisation utile d'un concept de convergence pour les multifonctions semi-continues inférieurement. Des applications a un problème de stabilité dans le processus de rafle du premier ordre sont données dans la partie 4. La partie 5 traite d'un problème de stabilité et d'existence de minimum dans le processus de rafle du second ordre. Finalement, dans l'appendice, on donne plusieurs résultats concernant les fonctionnelles intégrales définies sur l'espace des mesures à variation bornée.

2. Notations. Définitions.

Soit T un espace polonais (i.e., T est un espace topologique séparable et il existe une métrique complète définissant la topologie de T) et $\mathcal{B}(T)$ sa tribu borélienne. Soit E un espace de Banach séparable et réflexif de norme $\|\cdot\|$, E' son dual fort et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la forme bilinéaire de dualité entre E et E'. La boule unitée fermée B' de E' est munie de la

---

Ce chapitre est la traduction de l'article "*Epi-convergence of integral fonctionals. Application to the sweeping process,*" fait en collaboration avec C. Castaing qui sera publié dans le "Proceedings of the Conference on *Nonlinear and Convex Analysis in Economic Theory,* Tokyo, Japan, July 2-4, 1993".

topologie $*$-faible $\sigma(E', E)$; c'est un espace compact métrisable. On note $B(x, r)$ (resp. $\overline{B}(x, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de E de centre x et de rayon r.

On note $\mathcal{C}^b(T, E)$ l'espace de Banach des applications continues bornées de T dans E muni de la norme uniforme.

Une mesure vectorielle sur T à valeurs dans E' est une fonction d'ensemble σ-additive m de $\mathcal{B}(T)$ dans E'. La variation de la mesure m est la mesure à valeurs réelles positives $|m|$ définie sur T par

$$|m|(A) = \sup \left\{ \sum_{i \in I} \|m(A_i)\| : (A_i)_{i \in I} \ \mathcal{B}(T)\text{-partition finie de } A \right\} , \qquad \forall A \in \mathcal{B}(T) .$$

On note $\mathcal{M}^b(T, E')$ l'espace des mesures vectorielles m définies sur T à valeurs dans E' et à variation bornée (i.e., $|m|$ est une mesure de Radon bornée sur T). On pose $\|m\| = |m|(T)$.

Pour tout $m \in \mathcal{M}^b(T, E')$, il existe une fonction $|m|$-mesurable $\frac{dm}{d|m|} : T \longrightarrow B'$ telle que $m = \frac{dm}{d|m|}|m|$, c'est-à-dire

$$m(A) = \int_A \frac{dm}{d|m|}(t) \, d|m|(t) , \qquad \forall A \in \mathcal{B}(T) .$$

Pour tout $f \in \mathcal{C}^b(T, E)$ et tout $m \in \mathcal{M}^b(T, E')$, on définit l'intégrale de f par rapport à m par

$$\int f \, dm = \int \left\langle f(t), \frac{dm}{d|m|}(t) \right\rangle d|m|(t) .$$

De cette façon, $\mathcal{M}^b(T, E')$ s'identifie à un sous-espace vectoriel du dual topologique de $\mathcal{C}^b(T, E)$. On munit alors $\mathcal{M}^b(T, E')$ de la topologie $*$-faible $\sigma(\mathcal{M}^b(T, E'), \mathcal{C}^b(T, E))$ dite topologie *faible* (ou *étroite*).

Pour plus de détails sur les mesures vectorielles, on renvoie à [No1], [No2], [Di1], [Di2], [Jo], [DU].

Un sous-ensemble $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}^b(T, E')$ est *borné* si

$$\sup_{m \in \mathcal{H}} \|m\| < +\infty .$$

Il est *tendu* (ou il satisfait à la *condition de Prokhorov*) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble compact K_ε de T tel que

$$|m|(T \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon , \qquad \forall m \in \mathcal{H} .$$

On rappelle à présent le théorème de Prokhorov ([Bk2, §5, Théorème 1], [DM, Théorème III.59]) :

Théorème 2.1. *Soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble borné tendu de $\mathcal{M}^b(T,\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{H}$ est relativement faiblement compact dans $\mathcal{M}^b(T,\mathbb{R})$.*

Finalement, on conclut cette partie en rappelant quelques notions classiques d'analyse épigraphique (c.f., [A]) :

Soit X un espace topologique vérifiant le premier axiome de dénombrabilité[1]. Soit $(F_n)_n$ une suite de fonctions de X dans $[-\infty,+\infty]$. La *limite épigraphique inférieure* (resp. *supérieure*) $\mathrm{li_e}\, F_n$ (resp. $\mathrm{ls_e}\, F_n$) de la suite $(F_n)_n$ est définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{li_e}\, F_n(x) &= \min_{\{x_n \to x\}} \liminf_n F_n(x_n)\,, \qquad \forall x \in X\ , \\ \mathrm{ls_e}\, F_n(x) &= \min_{\{x_n \to x\}} \limsup_n F_n(x_n)\,, \qquad \forall x \in X\ . \end{aligned}$$

La suite $(F_n)_n$ *épi-converge* vers F en x si $F(x) = \mathrm{li_e}\, F_n(x) = \mathrm{ls_e}\, F_n(x)$.

La *limite inférieure* (resp. *supérieure*) d'une suite $(C_n)_n$ de sous-ensembles non-vides fermés convexes de E est définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}(C_n) &= \{x \in E : \exists (x_n)_n,\ x_n \in C_n,\ x = \lim_n x_n\}\ , \\ \mathrm{Ls}(C_n) &= \{x \in E : \exists (x_k)_k,\ x_k \in C_{n_k},\ x = \lim_k x_k\}\ . \end{aligned}$$

On rappelle aussi que pour tout sous-ensemble non-vide fermé convexe C de E, la *fonction support* $\delta^*\colon E' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ de C est définie par

$$\delta^*(x,C) = \sup_{c\in C} \langle c, x\rangle\,, \qquad \forall x \in E'\ .$$

Finalement, une multifonction $\Gamma\colon T \Longrightarrow E$ est *semi-continue inférieurement* en $t_0 \in T$ si pour tout ouvert V de E vérifiant $\Gamma(t_0)\cap V \neq \emptyset$, il existe un voisinage U de t_0 dans T tel que pour chaque $t \in U$, $\Gamma(t)\cap V \neq \emptyset$.

Tous les résultats de la prochaine section restent valides sans hypothèses de tension, si T est un espace polonais localement compact et si $\mathcal{M}^b(T,E')$ est muni de la topologie vague (i.e., la topologie de la convergence simple sur l'espace $\mathcal{C}_c(T,E)$ des fonctions continues de T dans E à support compact).

3. Epi-convergence des fonctionnelles intégrales.

On s'intéresse dans cette partie à l'épi-convergence des fonctionnelles intégrales définies sur l'espace des mesures à variation bornée. La première partie de notre résultat principal est le théorème suivant.

[1] C'est-à-dire, tout point de X admet un système fondamental de voisinages dénombrable.

Théorème 3.1. *Soit* Y*un espace topologique polonais et* $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *Soit* $\{\phi_k : k \in \widehat{\mathbb{N}}\}$ *des applications semi-continues inférieurement sur* $T \times B' \times Y$ *à valeurs dans* $[0, +\infty]$ *telles que pour tout* $(t, y, k) \in T \times Y \times \widehat{\mathbb{N}}$, $\phi_k(t, \cdot, y)$ *est convexe et positivement* 1*-homogène sur* B'*, i.e., pour tout* $x \in B'$ *et tout* $\lambda \in [0, 1]$, $\phi_k(t, \lambda x, y) = \lambda \phi_k(t, x, y)$. *On suppose que* $\mathrm{li}_{\mathrm{e}}\, \phi_k \geq \phi_\infty$ *sur* $T \times B' \times Y$*, c'est-à-dire, pour toute suite* $\big((t_k, x_k, y_k)\big)_k$ *dans* $T \times B' \times Y$ *qui converge vers* (t, x, y)*, on a*

$$\liminf_k \phi_k(t_k, x_k, y_k) \geq \phi_\infty(t, x, y) \ . \tag{3.1.1}$$

Soit $(m_k)_k$ *une suite bornée et tendue dans* $\mathcal{M}^b(T, E')$ *qui converge faiblement vers* $m \in \mathcal{M}^b(T, E')$. *Soit* $(u_k)_k$ *une suite de fonctions continues sur* T *à valeurs dans* Y *qui converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de* T *vers une fonction continue* u*. On a alors*

$$\liminf_k \int_T \phi_k\big(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t), u_k(t)\big)\, d|m_k|(t) \geq \int_T \phi_\infty\big(t, \frac{dm}{d|m|}(t), u(t)\big)\, d|m|(t) \ .$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise une extension d'un théorème de Y. Reshetnyak aux mesures vectorielles définies sur un espace polonais (Théorème 6.1) ainsi que deux lemmes sur le produit des mesures (Lemmes 7.1 et 7.3).

Preuve. Par commodité, on pose $m_\infty = m$ et $u_\infty = u$. Remarquons que le compactifié d'Alexandroff $\widehat{\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ est un espace compact métrique. On définit la fonction $\psi\colon T \times \widehat{\mathbb{N}} \times B' \longrightarrow [0, +\infty]$, par $\psi(t, k, x) = \phi_k(t, x, u_k(t))$. Montrons que ψ est semi-continue inférieurement sur $T \times \widehat{\mathbb{N}} \times B'$. Soit $(t_k, p_k, x_k)_k$ une suite dans $T \times \widehat{\mathbb{N}} \times B'$ qui converge vers (t, p, x). On pose $a = \liminf_k \psi(t_k, p_k, x_k)$. Si $p \in \mathbb{N}$, pour k assez grand, $p_k = p$. Comme u_p est continue, la suite $(u_p(t_k))_k$ converge vers $u_p(t)$ dans Y. Il découle alors de la semi-continuité inférieure de ϕ_p que

$$\begin{aligned}\liminf_k \phi(t_k, p_k, x_k) &= \liminf_k \phi_{p_k}(t_k, x_k, u_{p_k}(t_k)) = \liminf_k \phi_p(t_k, x_k, u_p(t_k)) \\ &\geq \phi_p(t, x, u_p(t)) = \psi(t, p, x) \ .\end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas $p = \infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $a = \lim_k \psi(t_k, p_k, x_k)$ et que la suite $(p_k)_k$ est croissante. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$s_n = \begin{cases} t_1, & \text{si } n < p_1, \\ t_k, & \text{si } p_k \leq n < p_{k+1}, \end{cases} \qquad \text{et} \quad y_n = \begin{cases} x_1, & \text{si } n < p_1, \\ x_k, & \text{si } p_k \leq n < p_{k+1}. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} t &= \lim_n s_n \ , \quad (s_{p_k})_k = (t_k)_k \ , \\ x &= \lim_n y_n \ , \quad (y_{p_k})_k = (x_k)_k \ . \end{aligned}$$

De plus, comme u est continue et comme $(u_n)_n$ converge uniformément vers u sur le compact $\{t, s_n : n \in \mathbb{N}\}$, la suite $(u_n(s_n))_n$ converge vers $u(t)$ dans Y. Ainsi, par (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned}\liminf_k \psi(t_k, p_k, x_k) \geq \liminf_n \psi(s_n, n, y_n) &= \liminf_n \phi_n(s_n, y_n, u_n(s_n)) \\ &\geq \phi_\infty(t, x, u(t)) = \psi(t, \infty, x) \ .\end{aligned}$$

Cela prouve la semi-continuité inférieure de ψ. A présent, pour tout $k \in \widehat{\mathbb{N}}$, on considère la mesure ν_k de $\mathcal{M}^b(T \times \widehat{\mathbb{N}}, E')$ définie par $\nu_k = m_k \otimes \delta_k$ (où δ_k est la mesure de Dirac en k de $\mathcal{M}^b(\widehat{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$). Comme la suite $(\delta_k)_k$ est bornée, tendue et converge faiblement vers δ_∞ dans $\mathcal{M}^b(\widehat{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$, d'après les lemmes 7.1 et 7.3, on a $|\nu_k| = |m_k| \otimes \delta_k$ et la suite $(\nu_k)_k$ converge faiblement vers ν_∞ dans $\mathcal{M}^b(T \times \widehat{\mathbb{N}}, E')$. On applique alors le théorème de Reshetnyak (Théorème 6.1) à la fonction ψ et à la suite $(\nu_k)_k$. On trouve

$$\begin{aligned}\liminf_k \int_{T \times \widehat{\mathbb{N}}} \psi\big(t, n, \frac{d\nu_k}{d|\nu_k|}(t,n)\big)\, d|\nu_k|(t,n) \\ \geq \int_{T \times \widehat{\mathbb{N}}} \psi\big(t, n, \frac{d\nu_\infty}{d|\nu_\infty|}(t,n)\big)\, d|\nu_\infty|(t,n) \ . \qquad (3.1.2)\end{aligned}$$

Comme pour chaque $k \in \widehat{\mathbb{N}}$, $\nu_k = m_k \otimes \delta_k$, grâce au lemme 7.1, on a

$$\frac{d\nu_k}{d|\nu_k|} = \frac{d(m_k \otimes \delta_k)}{d(|m_k| \otimes \delta_k)} = \frac{dm_k}{d|m_k|} \otimes 1 \ .$$

On déduit alors que pour tout $k \in \widehat{\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}\int_{T \times \widehat{\mathbb{N}}} \psi\big(t, n, \frac{d\nu_k}{d|\nu_k|}(t,n)\big)\, d|\nu_k|(t,n) &= \int_T \int_{\widehat{\mathbb{N}}} \psi\big(t, n, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t).1(n)\big)\, d|\delta_k|(n)\, d|m_k|(t) \\ &= \int_T \psi\big(t, k, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\big)\, d|m_k|(t) \\ &= \int_T \phi_k\big(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t), u_k(t)\big)\, d|m_k|(t) \ .\end{aligned}$$

Finalement par (3.1.2), on obtient

$$\liminf_k \int_T \phi_k\big(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t), u_k(t)\big)\, d|m_k|(t) \geq \int_T \phi_\infty\big(t, \frac{dm}{d|m|}(t), u(t)\big)\, d|m|(t) \ .$$

Ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque 3.2. L'ensemble $\widehat{\mathbb{N}}$ a aussi été utilisé par E. Balder ([Ba2]) et M. Valadier ([V6]).

Théorème 3.3. *Soit* $\{\phi_k : k \in \widehat{\mathbb{N}}\}$ *des applications semi-continues inférieurement sur* $T \times B'$ *à valeurs dans* $[0, +\infty]$ *telles que pour tout* $k \in \widehat{\mathbb{N}}$ *et tout* $t \in T$, $\phi_k(t, \cdot)$ *est convexe et positivement homogène sur* B'. *On suppose que* $\mathrm{li_e}\, \phi_k \geq \phi_\infty$ *sur* $T \times B'$, *et que pour tout* $t \in T$, $\phi_\infty(t, \cdot) \geq \mathrm{ls_e}\, \phi_k(t, \cdot)$ *sur* B'. *C'est-à-dire, pour tout* $(t, x) \in T \times B'$, *et toute suite* $(t_k, x_k)_k$ *de* $T \times B'$ *qui converge vers* (t, x), *on a*

$$\liminf_k \phi_k(t_k, x_k) \geq \phi_\infty(t, x) \ , \tag{3.3.1}$$

et il existe une suite $(x_k)_k$ *dans* B' *convergeant vers* x *et telle que*

$$\phi_\infty(t, x) \geq \limsup_k \phi_k(t, x_k) \ . \tag{3.3.2}$$

Considérons les fonctionnelles $\{I_{\phi_k} : k \in \widehat{\mathbb{N}}\}$ *définies sur* $\mathcal{M}^b(T, E')$ *par*

$$I_{\phi_k}(m) = \int_T \phi_k\big(t, \frac{dm}{d|m|}(t)\big)\, d|m|(t) \ .$$

Alors pour toute suite bornée tendue $(m_k)_k$ *de* $\mathcal{M}^b(T, E')$ *qui converge faiblement vers* $m \in \mathcal{M}^b(T, E')$, *on a*

$$\liminf_k I_{\phi_k}(m_k) \geq I_{\phi_\infty}(m) \ ,$$

et pour tout $m \in \mathcal{M}^b(T, E')$, *il existe un suite bornée tendue* $(m_k)_k$ *dans* $\mathcal{M}^b(T, E')$ *convergeant faiblement vers* m *telle que*

$$\limsup_k I_{\phi_k}(m_k) \leq I_{\phi_\infty}(m) \ .$$

C'est-à-dire, la suite $(I_{\phi_k})_k$ *épi-converge séquentiellement sur les sous-ensembles bornés tendus de* $\mathcal{M}^b(T, E')$.

Preuve. Par le théorème 3.1, on sait déjà que pour toute suite $(m_k)_k$ bornée tendue de $\mathcal{M}^b(T, E')$ qui converge faiblement vers m, on a

$$\liminf_k I_{\phi_k}(m_k) \geq I_{\phi_\infty}(m) \ .$$

Montrons la seconde inégalité. On utilise une idée de A. Salvadori ([Sa, Proof of Theorem 3.1]) : fixons $m \in \mathcal{M}^b(T, E')$. On pose $v = \frac{dm}{d|m|} \in L^1_{E'}(T, \mathcal{B}(T), d|m|)$. Si $I_{\phi_\infty}(m) = +\infty$, il n'y a rien à montrer. On peut donc supposer que $\phi_\infty(\cdot, v(\cdot)) \in L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{B}(T), d|m|)$. Soit $\psi_k \colon T \times B' \longrightarrow [0, +\infty]$ l'application définie par

$$\psi_k(t, x) = \big[\phi_k(t, x) - \phi_\infty(t, v(t))\big]^+ \ .$$

Il est clair que ψ_k est mesurable sur $T \times B'$ et que $\psi_k(t, \cdot)$ est semi-continue inférieurement sur le compact B'. On considère alors la multifonction $\Gamma_k \colon T \rightrightarrows B'$ définie par

$$\Gamma_k(t) = \{y \in B' : d(v(t), y) + \psi_k(t, y) = \min_{x \in B'} \{d(v(t), x) + \psi_k(t, x)\}\} \ ,$$

où d est une métrique sur B' (muni de la topologie $*$-faible). Comme B' est compact, il est clair que pour tout $t \in T$, $\Gamma_k(t)$ est non vide. D'après [CV, III.39], il existe[2] une sélection $v_k \in L^1_{E'}(T, \mathcal{B}(T), d|m|)$ de Γ_k. Pour chaque $t \in T$, par (3.3.2), il existe une suite $(x_k)_k$ dans B' qui converge vers $v(t)$ et telle que $\lim_k \psi_k(t, x_k) = 0$. Comme

$$d(v(t), v_k(t)) + \psi_k(t, v_k(t)) \leq d(v(t), x_k) + \psi_k(t, x_k) \ ,$$

on obtient

$$\lim_k d(v(t), v_k(t)) = 0 \ ,$$
$$\lim_k \psi_k(t, v_k(t)) = 0 \ .$$

D'un autre coté, comme $\phi_k(t, 0) = 0$, on a $\psi_k(t, 0) = 0$ et donc

$$d(v(t), v_k(t)) + \psi_k(t, v_k(t)) \leq d(v(t), 0) + \psi_k(t, 0) \leq M \ ,$$

où $M = \sup\{d(x, y) : (x, y) \in B' \times B'\}$. Comme $|m|$ est bornée, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que la suite $\big(\psi_k(\cdot, v_k(\cdot))\big)_k$ converge vers 0 dans $L^1_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{B}(T), d|m|)$. On a alors

$$\lim_k \int_T \big[\phi_k(t, v_k(t)) - \phi_\infty(t, v(t))\big]^+ \, d|m|(t) = 0 \ ,$$

et donc

$$\limsup_k \int_T \phi_k(t, v_k(t)) \, d|m|(t) \leq \int_T \phi_\infty(t, v(t)) \, d|m|(t) \ . \tag{3.3.3}$$

On pose $m_k = v_k|m|$. Il est clair que $(m_k)_k$ est une suite bornée tendue dans $\mathcal{M}^b(T, E')$. Montrons que $(m_k)_k$ converge faiblement vers m : soit $f \in \mathcal{C}^b(T, E)$. Comme $(v_k(t))_k$ converge vers $v(t)$ dans B', on a,

$$\lim_k \langle f(t), v_k(t) \rangle = \langle f(t), v(t) \rangle \ .$$

De plus, comme $v(t) \in B'$, on a

$$|\langle f(t), v(t) \rangle| \leq \|f(t)\| \ .$$

Comme $|m|$ est bornée, $f \in L^1_E(T, \mathcal{B}(T), d|m|)$. Par le théorème de Lebesgue, on trouve alors

$$\lim_k \int_T \langle f(t), v_k(t) \rangle \, d|m|(t) = \int_T \langle f(t), v(t) \rangle \, d|m|(t) \ .$$

---

[2]En fait, d'après [CV, III.39], il existe une sélection v_k $(\mathcal{B}_{|m|}(T), \mathcal{B}(B'))$-mesurable de Γ_k — où $\mathcal{B}_{|m|}(T)$ est la tribu $|m|$-complété de $\mathcal{B}(T)$ et $\mathcal{B}(B')$ est la tribu de Borel de B'. De plus, comme $v_k(t) \in B'$ et comme $|m|$ est bornée, v_k est $|m|$-intégrable. En modifiant v_k sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que $v_k \in L^1_{E'}(T, \mathcal{B}(T), d|m|)$.

et donc $\lim_k \langle f, m_k\rangle = \langle f, m\rangle$. Ce qui prouve que $(m_k)_k$ converge faiblement vers m dans $\mathcal{M}^b(T,E')$. Il est facile de voir que

$$\frac{dm_k}{d|m_k|}(t) = \frac{d(v_k|m|)}{d(\|v_k\|\,|m|)}(t) = \begin{cases} \frac{v_k(t)}{\|v_k(t)\|}, & \text{si } \|v_k(t)\| \neq 0, \\ 0, & \text{si } \|v_k(t)\| = 0. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_T \phi_k(t, v_k(t))\, d|m|(t) &= \int_T \phi_k\big(t, \frac{v_k(t)}{\|v_k(t)\|}\big)\|v_k\|\, d|m|(t) \\ &= \int_T \phi_k\big(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\big)\, d|m_k|(t)\ .\end{aligned}$$

Finalement, par (3.3.3), on trouve

$$\limsup_k \int_T \phi_k\big(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\big)\, d|m_k|(t) \leq \int_T \phi_\infty\big(t, \frac{dm}{d|m|}(t)\big)\, d|m|(t)\ .$$

C'est-à-dire

$$\limsup_k I_{\phi_k}(m_k) \leq I_{\phi_\infty}(m)\ ,$$

ce qui finit la preuve. □

On donne à présent des applications des résultats précédents aux intégrandes associés à des multifonctions.

Corollaire 3.4. *Soit Y un espace polonais. Soit $\{C_k : k \in \widehat{\mathbb{N}}\}$ des multifonctions semi-continues inférieurement sur $T\times Y$ à valeurs dans les sous-ensembles non-vides convexes fermés de E contenant 0. On suppose que pour toute suite $(t_k, y_k)_k$ dans $T \times Y$ qui converge vers $(t,y) \in T \times Y$, on a*

$$C_\infty(t,y) \subset \mathrm{Li}\big(C_k(t_k,y_k)\big)\ . \tag{3.4.1}$$

Soit $(m_k)_k$ une suite bornée tendue dans $\mathcal{M}^b(T,E')$ qui converge faiblement vers $m \in \mathcal{M}^b(T,E')$. Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues de T dans Y qui converge uniformément sur les compacts de T vers une fonction continue u. Alors on a

$$\liminf_k \int_T \delta^*\big(\frac{dm_k}{d|m_k|}(t), C_k(t,u_k(t))\big)\, d|m_k|(t) \geq \int_T \delta^*\big(\frac{dm}{d|m|}(t), C_\infty(t,u(t))\big)\, d|m|(t)\ .$$

Preuve. Pour tout $k \in \widehat{\mathbb{N}}$, on considère l'application $\phi_k : T\times B'\times Y \longrightarrow [0,+\infty]$ définie par

$$\phi_k(t,x,y) = \delta^*\big(x, C_k(t,y)\big)\ , \qquad \forall (t,x,y) \in T\times B'\times Y\ .$$

Trivialement, pour tout $t \in T$, $\phi_k(t,\cdot,y)$ est convexe et positivement homogène sur B'. Montrons que ϕ_k est semi-continue inférieurement sur $T\times B'\times Y$. Pour un k fixé dans

$\widehat{\mathbb{N}}$, par ([Mi, Lemma 5.2]), il existe une suite $(u_n)_n$ de sélections continues de C_k telle que pour chaque $(t,y) \in T \times Y$, $\{u_n(t,y) : n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $C_k(t,y)$. On a alors

$$\delta^*\big(x, C_k(t,y)\big) = \sup_n \langle u_n(t,y), x\rangle\,, \qquad \forall (t,x,y) \in T \times B' \times Y\ . \tag{3.4.2}$$

Comme u_n est continue et comme B' est muni de la topologie faible, la fonction $(t,x,y) \longmapsto \langle u_n(t,y), x\rangle$ est continue sur $T \times B' \times Y$. Par (3.4.2), on déduit que l'application $(t,x,y) \longmapsto \delta^*\big(x, C_k(t,y)\big)$ est semi-continue inférieurement sur $T \times B' \times Y$.

Montrons maintenant que la suite $(\phi_k)_k$ vérifie l'hypothèse (3.1.1) du théorème 3.1. Soit $(t_k, x_k, y_k)_k$ une suite dans $T \times B' \times Y$ qui converge vers $(t,x,y) \in T \times B' \times Y$ et soit $c \in C_\infty(t,y)$. Grâce à (3.4.1), il existe une suite $(c_k)_k$ dans E qui converge vers c et telle que

$$c_k \in C_k(t_k, y_k)\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ .$$

On a $\langle c, x\rangle = \lim_k \langle c_k, x_k\rangle$. D'où

$$\langle c, x\rangle \le \liminf_k \langle c_k, x_k\rangle \le \liminf_k \delta^*\big(x_k, C_k(t_k, y_k)\big)\ .$$

Comme cela est vrai pour $c \in C_\infty(t,y)$, on trouve

$$\delta^*\big(x, C_\infty(t,y)\big) \le \liminf_k \delta^*\big(x_k, C_k(t_k, y_k)\big)\ .$$

Cela signifie que

$$\phi_\infty(t,x,y) \le \liminf_k \phi_k(t_k, x_k, y_k)\ ,$$

et donc $\phi_\infty \le \mathrm{li_e}\, \phi_k$ sur $T \times B' \times Y$. D'après le théorème 3.1 appliqué à la suite $(\phi_k)_k$, on trouve

$$\liminf_k \int_T \phi_k\big(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t), u_k(t)\big)\, d|m_k|(t) \ge \int_T \phi_\infty\big(t, \frac{dm}{d|m|}(t), u(t)\big)\, d|m|(t)\ .$$

C'est à dire

$$\liminf_k \int_T \delta^*\big(\frac{dm_k}{d|m_k|}(t), C_k(t, u_k(t))\big)\, d|m_k|(t) \ge \int_T \delta^*\big(\frac{dm}{d|m|}(t), C_\infty(t, u(t))\big)\, d|m|(t)\ .$$

Ce qui achève la preuve. $\square$

Corollaire 3.5. *Soit $\{C_k : k \in \widehat{\mathbb{N}}\}$ des multifonctions semi-continues inférieurement sur T à valeurs dans les sous-ensembles non-vides convexes fermés de E. On suppose que pour tout $t \in T$, il existe $\varepsilon_t > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\overline{B}(0, \varepsilon_t) \subset C_k(t)$. On suppose aussi que pour tout $t \in T$, on a*

$$\mathrm{Ls}\big(C_k(t)\big) \subset C_\infty(t)\ , \tag{3.5.1}$$

et que pour toute suite $(t_k)_k$ de T qui converge vers $t \in T$, on a

$$C_\infty(t) \subset \mathrm{Li}\big(C_k(t_k)\big) \ . \tag{3.5.2}$$

Considérons les fonctionnelles I_{C_k} définies sur $\mathcal{M}^b(T,E')$ par

$$I_{C_k}(m) = \int_T \delta^*\big(\frac{dm}{d|m|}(t), C_k(t)\big)\, d|m|(t) \ .$$

Alors pour toute suite bornée tendue $(m_k)_k$ dans $\mathcal{M}^b(T,E')$ qui converge faiblement vers $m \in \mathcal{M}^b(T,E')$, on a

$$\liminf_k I_{C_k}(m_k) \geq I_{C_\infty}(m) \ ,$$

et pour tout $m \in \mathcal{M}^b(T,E')$, il existe une suite bornée tendue $(m_k)_k$ dans $\mathcal{M}^b(T,E')$ convergeant faiblement vers m telle que

$$\limsup_k I_{C_k}(m_k) \leq I_{C_\infty}(m) \ .$$

Preuve. Pour chaque $k \in \widehat{\mathbb{N}}$, on considère l'application $\phi_k \colon T \times B' \longrightarrow [0,+\infty]$ définie par

$$\phi_k(t,x) = \delta^*\big(x, C_k(t)\big) \ , \qquad \forall (t,x) \in T \times B' \ .$$

Montrons que $(\phi_k)_k$ vérifie les hypothèses du théorème 3.3. D'après la preuve du corollaire 3.4, il suffit de vérifier l'hypothèse (3.3.2) du théorème 3.3, c'est-à-dire que $\phi_\infty(t,\cdot) \geq \mathrm{ls_e}\, \phi_k(t,\cdot)$ sur B'. Soit t fixé dans T. Par (3.5.1), on a

$$\phi_\infty(t,x) = \delta^*\big(x, C_\infty(t)\big) \geq \delta^*\big(x, \mathrm{Ls}(C_k(t))\big) \ , \qquad \forall x \in B' \ .$$

De plus, par [A, Proposition 1.40 & Theorem 3.9], on a aussi

$$\delta^*\big(x, \mathrm{Ls}(C_k(t))\big) = \mathrm{ls_e}\, \delta^*\big(x, C_k(t)\big) \ , \qquad \forall x \in B' \ .$$

(Remarquons que l'hypothèse d'uniforme coercivité de [A, Theorem 3.9] est vérifiée grâce à l'hypothèse $\overline{B}(0,\varepsilon_t) \subset C_k(t)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. En fait, il suffit de supposer que $\overline{B}(0,\varepsilon) \subset C_\infty(t)$ pour tout t dans T. Voir la remarque 4.3.) Ainsi $\phi_\infty(t,\cdot) \geq \mathrm{ls_e}\, \phi_k(t,\cdot)$. Il ne reste qu'à appliquer le théorème 3.3 pour obtenir le résultat. □

La proposition suivante relie la condition (3.4.1) ou (3.5.2) sur la convergence des multifonctions avec celle introduite par C. Castaing dans [C6] (voir aussi [CDV], [V5]).

Proposition 3.6. *Soit S un espace polonais. Soit $\{C_k : k \in \widehat{\mathbb{N}}\}$ des multifonctions semi-continues inférieurement définies sur S à valeurs dans les sous-ensembles convexes fermés non-vides de E. Considérons les propriétés suivantes* :

(i) *pour toute sélection continue ϕ de C_∞, il existe des sélections continues ϕ_k de C_k telles que la suite $(\phi_k)_k$ converge vers ϕ uniformément sur les compacts de S ;*

(ii) *pour toute suite $(s_k)_k$ dans S qui converge vers $s \in S$, $C_\infty(s) \subset \mathrm{Li}\big(C_k(s_k)\big)$;*

(iii) *la multifonction $\Pi\colon S \times \widehat{\mathbb{N}} \rightrightarrows E$, $(s,n) \longmapsto C_n(s)$ est semi-continue inférieurement sur $S \times \widehat{\mathbb{N}}$.*

Alors (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). *De plus, si pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la multifonction C_k est continue* (*pour la distance de Hausdorff*), *alors les trois propriétés* (i), (ii) *et* (iii) *sont équivalentes.*

Preuve. (i) $\Longrightarrow$ (ii) est facile : soit $(s_k)_k$ une suite dans S qui converge vers $s \in S$ et $x \in C_\infty(s)$. D'après [Mi], il existe une sélection continue ϕ de C_∞ telle que $\phi(s) = x$. Par (i), il existe des sélections continues ϕ_k de C_k telles que la suite $(\phi_k)_k$ converge uniformément vers ϕ sur le compact $\{s, s_k : k \in \mathbb{N}\}$ de S. Ainsi, $x = \phi(s) = \lim_k \phi_k(s_k)$, et donc $x \in \mathrm{Li}\big(C_k(s_k)\big)$. Comme cela est vrai pour tout $x \in C_\infty(s)$, on obtient $C_\infty(s) \subset \mathrm{Li}\big(C_k(s_k)\big)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : la semi-continuité de Π en $(s_0, n_0) \in S \times \mathbb{N}$ provient de celle de C_{n_0} en s_0. Montrons que Π est semi-continue inférieurement en (s_0, ∞) : si Π n'était pas semi-continue, il existerait un ouvert V dans E avec $V \cap C_\infty(s_0) \neq \emptyset$ tel que pour chaque voisinage U de s_0 dans S, et chaque $N \in \mathbb{N}$,

$$\exists s \in U\,,\ \exists n \geq N\,, \quad V \cap C_n(s) = \emptyset\ .$$

On pourrait donc trouver une suite[3] $(s_k)_k$ convergeant vers s_0 dans S et une suite croissante $(k_p)_p$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall p \in \mathbb{N}\,, \quad V \cap C_{k_p}(s_{k_p}) = \emptyset\ . \tag{3.6.1}$$

Soit $x_0 \in V \cap C_\infty(s_0)$. Comme $(s_k)_k$ converge vers s_0, il existe une suite $(x_k)_k$ convergeant vers x_0 et telle que $x_k \in C_k(s_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi il existe N tel que pour tout $k \geq N$, $x_k \in V \cap C_k(s_k)$. Cela contredit (3.6.1) et prouve la semi-continuité inférieure de Π.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : soit $(s_k)_k$ une suite dans S qui converge vers $s_0 \in S$ et $x_0 \in C_\infty(s_0)$. Pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, d'après la semi-continuité de Π en (s_0, ∞), il existe un voisinage U_p de s_0 dans S et $N_p \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall s \in U_p\,,\ \forall k \geq N_p\,, \quad V_p \cap C_k(s) \neq \emptyset\ ,$$

[3]En fait, on pourrait trouver une suite croissante $(k_p)_p$ dans $\mathbb{N}$ et une suite $(t_p)_p$ dans S convergeant vers s_0 et telle que $V \cap C_{k_p}(t_p) = \emptyset$, $\forall p \in \mathbb{N}$. On pose alors $s_k = t_1$ si $k < k_1$ et $s_k = t_p$ si $k_p \leq k < k_{p+1}$. La suite $(s_k)_k$ converge vers s_0 et comme $(s_{k_p})_p = (t_p)_p$, (3.6.1) est vérifié.

où V_p représente la boule ouverte $B(x_0, 1/p)$. De plus, comme $(s_k)_k$ converge vers s_0, on peut supposer que pour $k \geq N_p$, $s_k \in U_p$. On a alors

$$\forall k \geq N_p\,, \quad V_p \cap C_k(s_k) \neq \emptyset\ .$$

Il existe donc $x_k^p \in V_p \cap C_k(s_k)$. On peut aussi supposer que la suite $(N_p)_p$ est strictement croissante et que $U_p \downarrow \{s_0\}$. Considérons alors la suite $(x_k)_k$ de E définie par

$$x_k = \begin{cases} \text{un point quelconque de } C_k(s_k), & \text{si } k < N_1, \\ x_k^p, & \text{si } N_p \leq k < N_{p+1}. \end{cases}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in C_k(s_k)$ et $(x_k)_k$ converge vers x_0 dans E. Cela prouve (ii).

Finalement, pour montrer que les trois propriétés (i), (ii) et (iii) sont équivalentes, il suffit de voir que (ii) $\Longrightarrow$ (i). La preuve est inspirée de [C6, Lemme 2.4 & Proposition 2.5]. Soit ϕ une sélection continue de C_∞. Comme C_k est continue, l'application $s \longmapsto d(\phi(s), C_k(s))$ l'est aussi (ici d est la distance associée à la norme de E). De plus, les fonctions $\big(s \longmapsto d(\phi(s), C_k(s))\big)_k$ convergent vers 0 uniformément sur les compacts de S. En effet, sinon il existerait $\alpha > 0$, un compact K de S et une suite croissante $(k_p)_p$ dans $\mathbb{N}$ tels que

$$\lim_p \sup_{s \in K} d\big(\phi(s), C_{k_p}(s)\big) \geq \alpha\ .$$

Il existerait donc[4] une suite $(s_k)_k$ dans K telle que

$$\lim_p d\big(\phi(s_{k_p}), C_{k_p}(s_{k_p})\big) \geq \alpha\ . \tag{3.9.2}$$

Comme K est compact, on pourrait supposer que $(s_k)_k$ converge vers un $s \in K$. On aurait donc

$$\begin{aligned} \liminf_p d\big(\phi(s), C_{k_p}(s_{k_p})\big) &\geq \liminf_p d\big(\phi(s), \phi(s_{k_p})\big) - d\big(\phi(s_{k_p}), C_{k_p}(s_{k_p})\big) \\ &\geq \liminf_p d\big(\phi(s_{k_p}), C_{k_p}(s_{k_p})\big) \\ &\geq \alpha\ . \end{aligned}$$

Mais cela contredirait l'hypothèse $\phi(s) \in C_\infty(s) \subset \mathrm{Li}\big(C_k(s_k)\big)$.

On pose à présent

$$r_k(s) = d\big(\phi(s), C_k(s)\big) + 1/k\,, \qquad \forall s \in S\,,\ \forall k \in \mathbb{N}\ .$$

Soit la multifonction $\Gamma_k \colon S \Longrightarrow E$ définie par

$$\Gamma_k(s) = \{x \in C_k(s) : \|x - \phi(s)\| < r_k(s)\}\,, \qquad \forall s \in S\ .$$

[4]En fait, on pourrait trouver une suite $(s_{k_p})_p$ dans K vérifiant (3.9.2). Comme K est compact, on pourrait supposer que $(s_{k_p})_p$ converge vers un $s \in K$. On pose alors $s_k = s_{k_1}$ si $k < k_1$ et $s_k = s_{k_p}$ si $k_p \leq k < k_{p+1}$.

Montrons que Γ_k est semi-continue inférieurement sur S : soit $s_0 \in S$ et V un ouvert de E tel que $\Gamma_k(s_0) \cap V \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in \Gamma_k(s_0) \cap V$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|x_0 - \phi(s_0)\| < r_k(s_0) - \varepsilon$, c'est-à-dire

$$C_k(s_0) \cap V \cap B(\phi(s_0), r_k(s_0) - \varepsilon) \neq \emptyset \ .$$

D'après la semi-continuité de C_k, la continuité de ϕ et celle de r_k, il existe un voisinage U de s_0 dans S tel que pour tout $s \in U$, on ait

$$\begin{gathered} C_k(s) \cap V \cap B(\phi(s_0), r_k(s_0) - \varepsilon) \neq \emptyset \\ \|\phi(s) - \phi(s_0)\| < \varepsilon/2 \\ r_k(s_0) - \varepsilon/2 \leq r_k(s) \ . \end{gathered}$$

On trouve alors pour tout $s \in U$ et tout $x \in C_k(s) \cap V \cap B(\phi(s_0), r_k(s_0) - \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \|x - \phi(s)\| &\leq \|x - \phi(s_0)\| + \|\phi(s_0) - \phi(s)\| \\ &\leq r_k(s_0) - \varepsilon + \varepsilon/2 < r_k(s) \ . \end{aligned}$$

Ainsi $\Gamma_k(s) \cap V \neq \emptyset$ pour tout $s \in U$. Ce qui prouve la semi-continuité inférieure de Γ_k. La multifonction $\overline{\Gamma}_k \colon S \rightrightarrows E$ définie par

$$\overline{\Gamma}_k(s) = \{x \in C_k(s) : \|x - \phi(s)\| \leq r_k(s)\} \ , \qquad \forall s \in S \ ,$$

est donc aussi semi-continue inférieurement. Par [Mi], il existe une sélection continue ϕ_k de $\overline{\Gamma}_k$. Ceci est vrai pour chaque $k \in \mathbb{N}$. D'après la définition de $\overline{\Gamma}_k$, pour tout $s \in S$, on a

$$\begin{gathered} \phi_k(s) \in C_k(s) \ , \\ \|\phi_k(s) - \phi(s)\| \leq r_k(s) \ . \end{gathered}$$

Comme $(r_k)_k$ converge vers 0 uniformément sur les compacts de S, la suite $(\phi_k)_k$ vérifie (i). $\square$

Remarque 3.7. En général, la condition (i) semble plus restrictive que (ii).

Corollaire 3.8. *On suppose que T est compact. Si, dans le corollaire* 3.4*, les multifonctions $\{C_k : k \in \widehat{\mathbb{N}}\}$ définies sur $T \times Y$ sont continues* (*pour la distance de Hausdorff*)*, il n'est pas nécessaire de supposer que*

$$\forall k \in \widehat{\mathbb{N}} \, , \ \forall (t, y) \in T \times Y \ , \quad 0 \in C_k(t, y) \ .$$

Preuve. Soit ϕ_∞ une sélection continue de C_∞. Par la proposition 3.6, il existe des sélections continues ϕ_k de C_k qui convergent uniformément vers ϕ_∞. On pose

$$\Gamma_k = C_k - \phi_k\,, \qquad \forall k \in \widehat{\mathbb{N}}\,.$$

Il est facile de voir que les multifonctions $\{\Gamma_k : k \in \widehat{\mathbb{N}}\}$ vérifient encore les hypothèses du corollaire 3.4. On a donc (avec $(m_k)_k$ et $(u_k)_k$ comme dans le corollaire 3.4),

$$\liminf_k \int_T \delta^*\big(\frac{dm_k}{d|m_k|}(t), \Gamma_k(t, u_k(t))\big)\, d|m_k|(t) \geq \int_T \delta^*\big(\frac{dm}{d|m|}(t), \Gamma_\infty(t, u(t))\big)\, d|m|(t)\,.$$

Il en découle que

$$\begin{aligned}\liminf_k \int_T \delta^*\big(\frac{dm_k}{d|m_k|}(t), C_k(t, u_k(t))\big)\, d|m_k|(t)&\\ - \liminf_k \int_T \big\langle \frac{dm_k}{d|m_k|}(t), \phi_k(t, u_k(t))\big\rangle\, d|m_k|(t)&\\ \geq \int_T \delta^*\big(\frac{dm}{d|m|}(t), C_\infty(t, u(t))\big)\, d|m|(t)&\\ - \int_T \big\langle \frac{dm}{d|m|}(t), \phi_\infty(t, u(t))\big\rangle\, d|m|(t)\,.& \qquad (3.8.1)\end{aligned}$$

Comme la suite $\big(\phi_k(\cdot, u_k(\cdot))\big)_k$ converge uniformément vers $\phi_\infty(\cdot, u(\cdot))$ et comme l'application $(\phi, m) \longmapsto \int \phi\, dm$ est continue sur $\mathcal{C}^b(T, E) \times \mathcal{M}^b(T, E')$, on a

$$\int_T \big\langle \frac{dm}{d|m|}(t), \phi(t, u(t))\big\rangle\, d|m|(t) = \liminf_k \int_T \big\langle \frac{dm_k}{d|m_k|}(t), \phi_k(t, u_k(t))\big\rangle\, d|m_k|(t)\,.$$

Ainsi (3.8.1) donne

$$\liminf_k \int_T \delta^*\big(\frac{dm_k}{d|m_k|}(t), C_k(t, u_k(t))\big)\, d|m_k|(t) \geq \int_T \delta^*\big(\frac{dm}{d|m|}(t), C_\infty(t, u(t))\big)\, d|m|(t)\,.$$

Ce qui achève la preuve. $\square$

4. Résultat de stabilité dans le processus de rafle.

Pour un réel strictement positif T, on considère l'intervalle $[0, T]$ de $\mathbb{R}$. Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $BV([0, T], \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions à variation bornée de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour $u \in BV([0, T], \mathbb{R}^d)$, la mesure de Stieltjes (ou mesure différentielle) de u est notée Du. ($Du \in \mathcal{M}^b([0, T], \mathbb{R}^d)$.) Comme dans la section 2, $|Du|$ (resp. $\|Du\|$) est la variation (resp. variation totale) de Du. Lorsque u est continue, on a pour $0 \leq s < t \leq T$,

$$u(t) - u(s) = \int_{[s,t]} dDu\,.$$

Pour plus de détails sur les fonctions à variation bornée, on renvoie à [Di1].

Pour tout convexe fermé non-vide C de $\mathbb{R}^d$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $N_C(x)$ est le cône normal à C en x. Finalement, on définit la fonction $\ell\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$\ell(r, R) = \begin{cases} \max(0, (R^2 - r^2)/2r), & \text{if } d \geq 2,\\ \max(0, R - r), & \text{if } d = 1.\end{cases}$$

Définition 4.1. Soit $C\colon [0,T] \Longrightarrow \mathbb{R}^d$ une multifonction semi-continue inférieurement à valeurs dans les convexes fermés non-vides de $\mathbb{R}^d$. Soit $a \in C(0)$. Une fonction à variation bornée $u\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une solution du *processus de rafle* par C sous la condition initiale a ($\mathcal{SW}(C,a)$), si u vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) $u(0) = a$;

(ii) $u(t) \in C(t), \qquad \forall t \in [0,T]$;

(iii) $-\dfrac{dDu}{d|Du|}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \qquad |Du|$-p.p.

L'existence et l'unicité des solutions du processus de rafle ont été étudiés par de nombreux spécialistes sous diverses hypothèses : C. Castaing ([C3], [C6]), A. Gavioli ([Ga]), M.D.P. Monteiro Marques ([MM1], [MM2]), J.J. Moreau ([Mo1], [Mo2], [Mo3], [Mo4]), H. Tanaka ([T]), M. Valadier ([V5]) ... Voir [V5] pour plus de références et de détails.

Théorème 4.2. *Soit $C\colon [0,T] \Longrightarrow \mathbb{R}^d$ une multifonction semi-continue inférieurement à valeurs convexes fermées non-vides. On suppose que*

(i) *il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset C(t)$, $\forall t \in [0,T]$;*

(ii) *le graphe de C est fermé à gauche (i.e., fermé dans $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ lorsque $[0,T]$ est muni de la topologie gauche).*

Soit $a \in C(0)$. Alors il existe une et une seule fonction continue à variation bornée $u\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ solution de $\mathcal{SW}(C,a)$. De plus, la solution u vérifie

$$\|Du\| = \int_T d|Du| \leq \ell(r_0, \|a - x_0\|) \ .$$

Références. On peut trouver dans [MM1] un résultat plus général, sur l'existence des solutions continues à droite. Celui présenté ici provient de [V5, Theorem 11]. Voir la remarque qui suit.

Remarque 4.3. En fait, dans [V5, Theorem 11], on suppose aussi qu'il existe une suite croissante $(C_n)_n$ de multifonctions lipschitziennes à valeurs convexes fermées non-vides telle que

(1) $\forall t \in [0,T]$, $\mathrm{cl}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n(t)\big) = C(t)$;

(2) $\forall t \in [0,T], \overline{B}(x_0, r_0) \subset C_0(t)$.

Mais par [V4] (voir aussi [V5, Theorem 8]), une telle suite existe. Le seul point qu'il reste à vérifier est (2) : il est clair que $C(t) \subset \mathrm{Li}\big(C_n(t_n)\big)$ pour toute suite $(t_n)_n$ convergeant vers $t \in [0,T]$. D'après la proposition 3.6, la multifonction $(n,t) \longmapsto C_n(t)$ est semi-continue inférieurement sur $\widehat{\mathbb{N}} \times [0,T]$. On a aussi $\overline{B}(x_0, r_0/2) \subset \mathrm{int}\, C(t)$. Donc par [V5, Lemma 7] (voir le lemme C plus bas), pour tout $t \in [0,T]$, il existe un voisinage U_t de t dans $[0,T]$ et un entier N_t tel que

$$\forall n \geq N_t\ ,\ \forall s \in U_t\ , \quad \overline{B}(x_0, r_0/2) \subset \mathrm{int}\, C_n(s)\ .$$

Comme $[0,T]$ est compact, il existe $\{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$ dans $[0,T]$ tels que $[0,T] = \bigcup_{i=1}^{p} U_{t_i}$. En posant $N = \sup_{i=1\ldots p} N_{t_i}$, on trouve

$$\forall n \geq N\ ,\ \forall t \in [0,T]\ , \quad \overline{B}(x_0, r_0/2) \subset \operatorname{int} C_n(s)\ .$$

On rappelle à présent quelques lemmes qu'on utilisera dans les prochaines preuves.

Proposition A. *Soit $C\colon [0,T] \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multifonction semi-continue inférieurement à valeurs convexes fermées non-vides et $u\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue à variation bornée telle que $u(t) \in C(t)$, $\forall t \in [0,T]$. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes* :

(i) $-\dfrac{dDu}{d|Du|}(t) \in N_{C(t)}(u(t)), \qquad |Du|$*-p.p.*

(ii) *pour tout $(s,t) \in [0,T] \times [0,T]$ avec $0 \leq s < t \leq T$,*

$$\int_{]s,t]} \delta^*\big(-\frac{dDu}{d|Du|}(\tau), C(\tau)\big)\, d|Du|(\tau) + \frac{1}{2}(\|u(t)\|^2 - \|u(s)\|^2) \leq 0\ .$$

Références. C'est une conséquence d'un résultat plus général de M. Valadier ([V5, Proposition 6]). Voir aussi [MM1, Preuve du Théorème 1].

Lemme B. *Soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^d$ avec un intérieur non-vide, $a \in C$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $x \in C$ et $r > 0$ tels que $\overline{B}(x,r) \subset \operatorname{int} C$ et $\ell(r, \|a - x\|) < \varepsilon$.*

Références. [V5, Lemma 10], [MM1, Lemme 3].

Lemme C. *Soit S un espace topologique, $C\colon S \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multifonction semi-continue inférieurement à valeurs convexes fermées non-vides et $s_0 \in S$. Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $K \subset \operatorname{int} C(s_0)$. Alors il existe un voisinage U de s_0 dans S tel que $K \subset \operatorname{int} C(s)$, $\forall s \in U$.*

Références. [V5, Lemma 7], [MM1, Lemme 1].

Proposition D. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de $BV([0,T], \mathbb{R}^d)$. Supposons que $\sup_n \|Du_n\| < +\infty$. Alors la suite $(u_n)_n$ est relativement séquentiellement compacte dans $BV([0,T], \mathbb{R}^d)$ pour la convergence simple. De plus, si $(u_{n_k})_k$ est une sous-suite de $(u_n)_n$ qui converge vers un u dans $BV([0,T], \mathbb{R}^d)$ telle que les fonctions $\{u, u_{n_k}\ :\ k \in \mathbb{N}\}$ soient continues à droite sur $[0,T]$, alors pour toute fonction continue $f\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et tout $(s,t) \in [0,T] \times [0,T]$ avec $0 \leq s < t \leq T$, on a*

$$\lim_k \int_{]s,t]} f\, dDu_{n_k} = \int_{]s,t]} f\, dDu.$$

C'est-à-dire, la suite $(1_{]s,t]} Du_{n_k})_k$ converge faiblement vers $1_{]s,t]} Du$ dans $\mathcal{M}^b([0,T], \mathbb{R}^d)$.

Références. [V5, Lemma 5 & (4) de la preuve du Theorem 11], [MM1, Lemma 4], [C3, Théorème 3]. Des parties de ce résultat sont aussi appelées *théorème de Banach* ou *théorème de Helly*.

Notre résultat de stabilité pour le processus de rafle du premier ordre est le suivant.

Théorème 4.4. *Soit $\{C, C_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ des multifonctions semi-continues inférieurement sur $[0,T]$ à valeurs dans les sous-ensembles convexes fermés non-vides de $\mathbb{R}^d$. On suppose que*

(i) *pour toute suite $(t_n)_n$ dans $[0,T]$ qui converge vers t, $C(t) \subset \operatorname{Li}\big(C_n(t_n)\big)$* ;

(ii) *pour tout $t \in [0,T]$, $\operatorname{Ls}\big(C_n(t)\big) \subset C(t)$* ;

(iii) *les multifonctions $\{C, C_n : n \in \mathbb{N}\}$ ont des graphes fermés à gauche* ;

(iv) *il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset C_n(t)$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n \in C_n(0)$ tel que la suite $(a_n)_n$ converge vers un $a \in \mathbb{R}^d$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit u_n la solution continue à variation bornée de $\mathcal{SW}(C_n, a_n)$. Alors, la suite $(u_n)_n$ converge simplement vers un fonction continue à variation bornée $u\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ qui est l'unique solution de $\mathcal{SW}(C, a)$.

Preuve. On adapte une preuve de M. Valadier ([V5, preuve du Theorem 11], voir aussi [MM1]). On pose $C_\infty = C$. Par le théorème 4.2, on a $\|Du_n\| \leq \ell(r_0, \|a_n - x_0\|)$. En posant $R = \sup_n \|a_n - x_0\|$, on obtient $\|Du_n\| \leq \ell(r_0, R)$. Donc d'après la proposition D, la suite $(u_n)_n$ est relativement séquentiellement compacte pour la topologie de la convergence simple. Il suffit donc de vérifier que toute valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ est (l'unique) solution de $\mathcal{SW}(C, a)$. Soit donc u une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$. Il existe une sous-suite encore notée $(u_n)_n$ qui converge simplement vers u. Il est clair que $u(0) = a$ et par (ii) que $u(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. De plus, grâce à la proposition D, u est à variation bornée.

Montrons que u est continue à droite en $t_0 \in [0, T[$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme B, il existe $r_1 > 0$ et $x_1 \in C(t_0)$ tels que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset \operatorname{int} C(t_0)$ et $\ell(r_1, \|u(t_0) - x_1\|) \leq \varepsilon$. D'après la proposition 3.6, la multifonction $(t, n) \longmapsto C_n(t)$ est semi-continue inférieurement sur $[0, T] \times \widehat{\mathbb{N}}$. D'après le lemme C, il existe donc $\eta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ \forall t \in [t_0, t_0 + \eta]\,, \quad \overline{B}(x_1, r_1) \subset \operatorname{int} C_n(t)\ .$$

Comme $\ell(r_1, \cdot)$ est continue et comme $(u_n(t_0))_n$ converge vers $u(t_0)$, on peut supposer que $\ell(r_1, \|u_n(t_0) - x_1\|) \leq \varepsilon$, $\forall n \geq N$. Alors, grâce au théorème 4.2, on trouve[5]

$$\int_{[t_0, t_0+\eta]} d|Du_n|(t) \leq \ell(r_1, \|u_n(t_0) - x_1\|) \leq \varepsilon\ .$$

D'où

$$\forall n \geq N\,,\ \forall t \in [t_0, t_0 + \eta]\,, \quad \|u_n(t) - u_n(t_0)\| \leq \varepsilon\ .$$

Il en découle que

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \eta]\,, \quad \|u(t) - u(t_0)\| \leq \varepsilon\ .$$

Cela prouve que u est continue à droite en t_0.

Montrons à présent que u continue à gauche en $t \in]0, T]$. Comme le graphe de C est fermé à gauche,

$$u^-(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} u(t) \in C(t_0)\ .$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme B, il existe $x_1 \in \mathbb{R}^d$ et $r_1 > 0$ tels que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset \operatorname{int} C(t_0)$ et $\ell(r_1, \|u^-(t_0) - x_1\|) \leq \varepsilon/3$. Comme la multifonction $(t, n) \longmapsto C_n(t)$ est semi-continue inférieurement sur $[0, T] \times \widehat{\mathbb{N}}$, d'après le lemme C il existe $\eta > 0$ et $N_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq N_1\,,\ \forall t \in [t_0 - \eta, t_0]\,, \quad \overline{B}(x_1, r_1) \subset \operatorname{int} C_n(t)\ .$$

[5] On utilise ici le fait que u_n est la solution sur $[t_0, t_0 + \eta]$ du processus de rafle par C_n sous la condition initiale $u_n(t_0)$.

De plus, il existe $t_1 \in [t_0 - \eta, t_0[$ et $N_2 \geq N_1$ tels que, pour tout $n \geq N_2$,

$$\|u(t_1) - u^-(t_0)\| < \varepsilon/3\,,$$
$$\|u_n(t_1) - u(t_1)\| < \varepsilon/3\ ,$$

et tels que, en utilisant la continuité de $\ell(r_1, \cdot)$,

$$\ell(r_1, \|u_n(t_1) - x_1\|) < \varepsilon/3\ .$$

D'après le théorème 4.2, on a

$$\int_{[t_1,t_0]} d|Du_n|(t) \leq \ell(r_1, \|u_n(t_1) - x_1\|) < \varepsilon/3\ .$$

Ainsi $\|u_n(t_0) - u_n(t_1)\| < \varepsilon/3$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\|u_n(t_0) - u^-(t_0)\| &\leq \|u_n(t_0) - u_n(t_1)\| + \|u_n(t_1) - u(t_1)\| + \|u(t_1) - u^-(t_0)\| \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\ .\end{aligned}$$

Comme $(u_n(t_0))_n$ converge vers $u(t_0)$, on trouve

$$\|u(t_0) - u^-(t_0)\| \leq \varepsilon\ .$$

Lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, on a $u(t_0) = u^-(t_0)$. Cela prouve la continuité à droite de u en t_0.

La fonction u est donc continue sur $[0, T]$. Montrons alors que u est (l'unique) solution de $\mathcal{SW}(C, a)$, c'est-à-dire que

$$-\frac{dDu}{d|Du|}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \qquad |Du|\text{-p.p.}$$

Comme u est continue sur $[0, T]$, d'après la proposition A, c'est équivalent à

$$\int_{]s,t]} \delta^*\big(-\frac{dDu}{d|Du|}(\tau), C(\tau)\big)\, d|Du|(\tau) + \frac{1}{2}(\|u(t)\|^2 - \|u(s)\|^2) \leq 0\ .$$

pour $0 \leq s < t \leq T$. Comme u_n est solution de $\mathcal{SW}(C_n, a_n)$, on a

$$\int_{]s,t]} \delta^*\big(-\frac{dDu_n}{d|Du_n|}(\tau), C_n(\tau)\big)\, d|Du_n|(\tau) + \frac{1}{2}(\|u_n(t)\|^2 - \|u_n(s)\|^2) \leq 0\ . \qquad (4.4.1)$$

Par la proposition D, la suite (bornée) $(-1_{]s,t]}Du_n)_n$ converge faiblement vers $1_{]s,t]}Du$ dans $\mathcal{M}^b([0, T], \mathbb{R}^d)$. Grâce au corollaire 3.4, on obtient

$$\begin{aligned}\liminf_n \int_T \delta^*\big(\frac{d(-1_{]s,t]}Du_n)}{d|-1_{]s,t]}Du_n|}(\tau), C_n(\tau)\big)\, d|-1_{]s,t]}Du_n|(\tau) \\ \geq \int_T \delta^*\big(\frac{d(-1_{]s,t]}Du)}{d|-1_{]s,t]}Du|}(\tau), C(\tau)\big)\, d|-1_{]s,t]}Du|(\tau)\ .\end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\liminf_n \int_{]s,t]} \delta^*\big(-\frac{dDu_n}{d|Du_n|}(\tau), C_n(\tau)\big)\, d|Du_n|(\tau)$$
$$\geq \int_{]s,t]} \delta^*\big(-\frac{dDu}{d|Du|}(\tau), C(\tau)\big)\, d|Du|(\tau)\ . \qquad (4.4.2)$$

Comme $(u_n)_n$ converge simplement vers u, on a

$$\lim_n \tfrac{1}{2}(\|u_n(t)\|^2 - \|u_n(s)\|^2) = \tfrac{1}{2}(\|u(t)\|^2 - \|u(s)\|^2)\ . \qquad (4.4.3)$$

Finalement, en regroupant (4.4.1), (4.4.2) et (4.4.3), on obtient

$$\int_{]s,t]} \delta^*\big(-\frac{dDu}{d|Du|}(\tau), C(\tau)\big)\, d|Du|(\tau) + \frac{1}{2}(\|u(t)\|^2 - \|u(s)\|^2) \leq 0\ .$$

C'est-à-dire, $-\dfrac{dDu}{d|Du|}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \quad |Du|$-p.p. $\square$

Remarque 4.5. Dans [C6], C. Castaing obtient un résultat du même type en supposant que la suite $(C_n)_n$ vérifie l'hypothèse (i) de la proposition 3.6.

5. Stabilité et existence de minimum dans le processus de rafle du second ordre.

On s'intéresse à présent au processus de rafle du second ordre introduit par C. Castaing dans [C7]. On rappelle tout d'abord un résultat d'existence.

On garde les notations de la section 4.

Définition 5.1. Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$, $C\colon \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multifonction semi-continue inférieurement sur Ω à valeurs convexes fermées non-vides telle que $C(x) \subset \overline{B}(0, r_1)$, $\forall x \in \Omega$. Soit $a \in \Omega$, $b \in C(a)$ et $T > 0$ tel que $a + T\overline{B}(0, r_1) \subset \Omega$. Soit $X\colon [0, T] \longrightarrow \Omega$ une fonction absolument continue et $Y\colon [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction à variation bornée. Alors le couple (X, Y) est une solution du *processus de rafle du second ordre* par C sous les conditions initiales (a, b) ($\mathcal{SW}(C, a, b)$) si

(i) $X(t) = a + \displaystyle\int_0^t Y(\tau)\, d\tau, \qquad \forall t \in [0, T]$;

(ii) $Y(0) = b$;

(iii) $Y(t) \in C(X(t)), \qquad \forall t \in [0, T]$;

(iv) $-\dfrac{dDY}{d|DY|}(t) \in N_{C(X(t))}(Y(t)) \qquad |DY|$-p.p.

Remarque 5.2. Le couple (X, Y) est une solution du processus de rafle du second ordre $\mathcal{SW}(C, a, b)$ si et seulement si Y est une solution du processus de rafle (du premier ordre) $\mathcal{SW}(C(X(\cdot)), b)$ et (X, Y) vérifient la condition (i).

Théorème 5.3. *Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$ et $C\colon \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multifonction continue pour la distance de Hausdorff à valeurs convexes fermées non-vides telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r_0 > 0$ et $r_1 > 0$ avec $\overline{B}(x_0, r_0) \subset C(x) \subset \overline{B}(0, r_1)$, $\forall x \in \Omega$. Soit $a \in \Omega$, $b \in C(a)$ et $T > 0$ tels que $a + T\overline{B}(0, r_1) \subset \Omega$. Alors il existe une fonction r_1-lipschitzienne $X\colon [0, T] \longrightarrow \Omega$ et une fonction continue à variation bornée $Y\colon [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telles que (X, Y) soit solution du processus de rafle du second ordre $\mathcal{SW}(C, a, b)$.*

Références. [CDV, Theorem 6.1]. Voir aussi [C7].

On donne à présent notre résultat de stabilité pour le processus de rafle du second ordre.

Théorème 5.4. *Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$ et $\{C, C_n : n \in \mathbb{N}\}$ des multifonctions continues pour la distance de Hausdorff définies sur Ω à valeurs dans les sous-ensembles convexes fermés non-vides de $\mathbb{R}^d$. On suppose que*

(i) *pour toute suite $(x_n)_n$ dans Ω qui converge vers $x \in \Omega$, $C(x) \subset \mathrm{Li}\big(C_n(x_n)\big)$;*
(ii) *pour tout $x \in \Omega$, $\mathrm{Ls}\big(C_n(x)\big) \subset C(x)$;*
(iii) *il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r_0 > 0$ et $r_1 > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{B}(x_0, r_0) \subset C_n(x) \subset \overline{B}(0, r_1)$, $\forall x \in \Omega$.*

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n \in \Omega$, $b_n \in C_n(a_n)$ tels que $(a_n)_n$ converge vers $a \in \Omega$ et $(b_n)_n$ converge vers $b \in \mathbb{R}^d$. Soit $T > 0$ tel que $a_n + T\overline{B}(0, r_1) \subset \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n\colon [0, T] \longrightarrow \Omega$ une fonction r_1-lipschitzienne et $Y_n\colon [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue à variation bornée telle que (X_n, Y_n) soit solution du processus de rafle du second ordre $\mathcal{SW}(C_n, a_n, b_n)$. Alors il existe une sous-suite $(X_{n_k}, Y_{n_k})_k$, une fonction r_1-lipschitzienne $X\colon [0, T] \longrightarrow \Omega$ et une fonction continue à variation bornée $Y\colon [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telles que

(1) *la suite $(X_{n_k})_k$ converge uniformément vers X sur $[0, T]$;*
(2) *la suite $(Y_{n_k})_k$ converge simplement vers Y sur $[0, T]$;*
(3) *le couple (X, Y) est solution du processus de rafle du second ordre $\mathcal{SW}(C, a, b)$.*

Preuve. Soit K le sous-ensemble compact de Ω défini par $K = \{a, a_n : n \in \mathbb{N}\} + T\overline{B}(0, r_1)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, comme (X_n, Y_n) est solution de $\mathcal{SW}(C_n, a_n, b_n)$, on a $Y_n(t) \in C(X_n(t)) \subset \overline{B}(0, r_1)$, $\forall t \in [0, T]$. D'où

$$X_n(t) = a_n + \int_0^t Y_n(\tau)\, d\tau \in a_n + t\overline{B}(0, r_1) \subset K\ .$$

comme la suite $(X_n)_n$ est r_1-lipschitzienne, elle est équi-continue et par le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite $(X_{n_k})_k$ qui converge uniformément vers une fonction r_1-lipschitzienne $X\colon [0, T] \longrightarrow \Omega$. (En fait, $X\colon [0, T] \longrightarrow K$ et $K \subset \Omega$.) Il est facile de voir que les multifonctions $\{C(X(\cdot)), C_n(X_{n_k}(\cdot)) : k \in \mathbb{N}\}$ vérifient les hypothèses du théorème 4.4. Comme pour chaque $k \in \mathbb{N}$, Y_{n_k} est solution de $\mathcal{SW}(C_{n_k}(X_{n_k}(\cdot)), a_{n_k})$, le théorème 4.4 permet d'affirmer que la suite $(Y_{n_k})_k$ converge simplement vers une fonction continue à variation bornée $Y\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ qui est solution de $\mathcal{SW}(C(X(\cdot)),b)$. D'après la remarque 5.2, il ne reste plus qu'à montrer que

$$X(t) = a + \int_0^t Y(\tau)\,d\tau\,, \qquad \forall t \in [0,T]\ .$$

D'après le théorème 4.2, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\|DY_{n_k}\| \le \ell(r_0, \|b_{n_k} - x_0\|)$. Ainsi, $M = \sup_k \|DY_{n_k}\| < +\infty$. On a donc pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} \|Y_{n_k}(t)\| \le \|Y_{n_k}(t) - Y_n(0)\| + \|Y_{n_k}(0)\| &\le \int_{[0,T]} d|DY_{n_k}| + \|b_{n_k}\| \\ &\le M + \sup_k \|b_{n_k}\| < +\infty\ . \end{aligned}$$

Comme $(Y_{n_k})_k$ converge simplement vers Y, d'après le théorème de Lebesgue, $(Y_{n_k})_k$ converge vers Y dans $L^1_{\mathbb{R}^d}([0,T])$. Finalement, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n(t) = a_n + \int_0^t Y_n(\tau)\,d\tau\,, \qquad \forall t \in [0,T]\ ,$$

on obtient

$$X(t) = a + \int_0^t Y(\tau)\,d\tau\,, \qquad \forall t \in [0,T]\ ,$$

ce qui achève la preuve. $\square$

On finit cette section en donnant un résultat d'existence d'un minimum dans le processus de rafle du second ordre.

Théorème 5.5. *Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$ et $C\colon \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ une multifonction continue pour la distance de Hausdorff à valeurs convexes fermées non-vides telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r_0 > 0$ et $r_1 > 0$ avec $\overline{B}(x_0,r_0) \subset C(x) \subset \overline{B}(0,r_1)$, $\forall x \in \Omega$. Soit $a \in \Omega$, $b \in C(a)$ et $T > 0$ tels que $a + T\overline{B}(0,r_1) \subset \Omega$. On note $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ l'ensemble des paires (X,Y) de fonctions $X\colon [0,T] \longrightarrow \Omega$ r_1-lipschitziennes et $Y\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continues à variation bornée solutions du processus de rafle du second ordre par C sous les conditions initiales (a,b) ($\mathcal{SW}(C,a,b)$).*

Soit $\phi\colon [0,T] \times \overline{B}(0,1) \times \Omega \times \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,+\infty]$ une fonction semi-continue inférieurement telle que $\phi(t,\cdot,x,y)$ soit convexe et positivement 1-homogène sur $\overline{B}(0,1)$ pour tout (t,x,y) dans $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d$. Alors il existe $(\widetilde{X},\widetilde{Y})$ dans $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ tel que

$$\begin{aligned} a := \inf_{(X,Y)\in\boldsymbol{\mathcal{S}}} \int_{[0,T]} \phi\big(t, \frac{dDY}{d|DY|}, X(t), Y(t)\big)\, d|DY|(t) \\ = \int_{[0,T]} \phi\big(t, \frac{dD\widetilde{Y}}{d|D\widetilde{Y}|}, \widetilde{X}(t), \widetilde{Y}(t)\big)\, d|D\widetilde{Y}|(t)\ . \end{aligned}$$

Preuve. Soit $(X_n, Y_n)_n$ une suite minimisante, c'est-à-dire, $(X_n, Y_n) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$a = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,T]} \phi\big(t, \frac{dDY_n}{d|DY_n|}, X_n(t), Y_n(t)\big)\, d|DY_n|(t) \ .$$

Comme $(X_n)_n$ est équi-lipschitzienne, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(X_n)_n$ converge converge uniformément vers une fonction r_1-lipschitzienne $\widetilde{X}$.

On va montrer le fait suivant : $(Y_n)_n$ *est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme.*

D'après Moreau ([Mo2]), pour toute fonction à variation bornée continue à droite φ: $[0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $\varphi(0) = 0$, on a

$$\forall t \in [0, T] \,, \quad \tfrac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2 \le \int_{[0,t]} \langle \varphi, D\varphi\rangle \ .$$

Alors pour tout entier m et n, on a

$$\forall t \in [0, T] \,, \quad \tfrac{1}{2}\|Y_n(t) - Y_m(t)\|^2 \le \int_{[0,t]} \langle Y_n - Y_m, DY_n - DY_m\rangle \ .$$

Rappelons que par le théorème 4.2, on a $\sup_n \int_{[0,T]} |DY_n| < +\infty$. On pose $\mu_n = |DY_n|$ et $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\mu_n}{\|\mu_n\|}$. Pour tout $n \ge 1$, on a$\mu_n \ll \mu$. Il existe donc une fonction intégrable g_n dans $L^1_{\mathbb{R}+}([0, T], \mu)$ telle que $|DY_n| = g_n\mu$. On a alors

$$DY_n = \frac{dDY_n}{d|DY_n|}\, |DY_n| = \frac{dDY_n}{d|DY_n|}\, g_n\mu \ .$$

On pose $Z_n = \dfrac{dDY_n}{d|DY_n|}\, g_n$ pour tout $n \ge 1$. Comme

$$-\frac{dDY_n}{d|DY_n|}(t) \in N_{C(X_n(t))}(Y_n(t)) \qquad |DY_n|\text{-p.p.},$$

on peut facilement montrer que

$$-Z_n(t) \in N_{C(X_n(t))}(Y_n(t)) \qquad \mu\text{-p.p.} \tag{$*$}$$

Détails: fixons $n \in \mathbb{N}$. Soit N_n un μ_n-négligeable tel que

$$\forall t \in [0, T] \setminus N_n \,, \quad -\frac{dDY_n}{d|DY_n|}(t) \in N_{C(X_n(t))}(Y_n(t)) \ .$$

Si $\mu(N_n) = 0$, $(*)$ est vérifié. Sinon, comme $\mu_n = g_n\mu$ avec $g \in L^1_{\mathbb{R}+}([0, T], \mu)$ et $\mu_n(N_n) = 0$, il existe un μ-négligeable $M_n \subset N_n$ tel que $g_n\big|_{N_n\setminus M_n} = 0$. A présent, si $t \in N_n \setminus M_n$, on a

$$-\frac{dDY_n}{d|DY_n|}(t) = 0 \in N_{C(X_n(t))}(Y_n(t)) \ .$$

Ainsi $(*)$ est encore vérifié.

Il découle de la définition de Z_n que

$$\tfrac{1}{2}\|Y_n(t) - Y_m(t)\|^2 \leq \int_{[0,t]} \langle Y_n - Y_m, Z_n - Z_m\rangle \, d\mu \; . \tag{5.5.1}$$

Pour tout $s \in [0,T]$, on pose $Y_n^m(s) = \mathrm{proj}_{C(X_n(s))}(Y_m(s))$. Alors le second membre de (5.5.1) peut s'écrire

$$\int_{[0,t]} \langle Y_n(s) - Y_n^m(s), Z_n(s)\rangle \, d\mu(s) + \int_{[0,t]} \langle Y_n^m(s) - Y_m(s), Z_n(s)\rangle \, d\mu(s) \\ + \int_{[0,t]} \langle Y_m(s) - Y_n(s), Z_m(s)\rangle \, d\mu(s) \; .$$

Comme $Y_n(s) \in C(X_n(s))$ et $-Z_n(s) \in N_{C(X_n(s))}(Y_n(s))$, pour μ-presque tout $s \in [0,T]$, on trouve

$$\int_{[0,t]} \langle Y_n(s) - Y_n^m(s), Z_n(s)\rangle \, d\mu(s) \leq 0 \; .$$

De plus on a

$$\int_{[0,t]} \langle Y_m(s) - Y_n(s), Z_m(s)\rangle \, d\mu(s) \\ \leq \int_{[0,t]} \delta^*\big(-Z_m(s), C(X_n(s))\big) \, d\mu(s) + \int_{[0,t]} \langle Y_m(s), Z_m(s)\rangle \, d\mu(s) \; .$$

Comme $(X_n)_n$ converge uniformément vers $\widetilde{X}$ et comme C est continue, $(C(X_n))_n$ converge aussi uniformément vers $C(\widetilde{X})$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe m_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que $m \geq n \geq m_0$ implique

$$\forall s \in [0,T], \quad h\big(C(X_m(s)), C(X_n(s))\big) \leq \varepsilon \; .$$

(Ici h est la distance de Hausdorff sur $\mathbb{R}^d$.) Il suit que pour tout $x' \in \mathbb{R}^d$ et tout $s \in [0,T]$,

$$\big|\delta^*\big(x', C(X_m(s))\big) - \delta^*\big(x', C(X_n(s))\big)\big| \leq \varepsilon\|x'\| \; ,$$

dès que $m \geq n \geq m_0$. D'où

$$\int_{[0,t]} \delta^*\big(-Z_m(s), C(X_n(s))\big) \, d\mu(s) \\ \leq \int_{[0,t]} \delta^*\big(-Z_m(s), C(X_m(s))\big) \, d\mu(s) + \int_{[0,t]} \varepsilon\|Z_m(s)\| \, d\mu(s) \; .$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{[0,t]} \langle Y_m(s) - Y_n(s), Z_m(s)\rangle \, d\mu(s) \leq \int_{[0,t]} \delta^*\big(-Z_m(s), C(X_m(s))\big) \, d\mu(s) \\ + \varepsilon \int_{[0,t]} \|Z_m(s)\| \, d\mu(s) + \int_{[0,t]} \langle Y_m(s), Z_m(s)\rangle \, d\mu(s) \; . \tag{5.5.2}$$

Comme

$$Z_m(s) \in -N_{C(X_m(s))}(Y_m(s)) \qquad \mu\text{-p.p.} ,$$

et comme

$$\sup_{n\geq 1}\int_{[0,T]} |DY_n| = \sup_{n\geq 1}\int_{[0,T]} \|Z_n\|\, d\mu < +\infty ,$$

(5.5.2) donne

$$\int_{[0,t]} \langle Y_m(s) - Y_n(s), Z_m(s)\rangle\, d\mu(s) \leq \varepsilon \sup_{n\geq 1}\int_{[0,T]} |DY_n| . \tag{5.5.3}$$

Finalement, on majore le troisième terme du second membre de (5.5.1). On a

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,t]} \langle Y_n^m(s) - Y_m(s), Z_n(s)\rangle\, d\mu(s) \\
&\qquad \leq \left(\sup_{n\geq 1}\int_{[0,T]} \|Z_n\|\, d\mu\right) \sup_{s\in[0,T]} \|Y_n^m(s) - Y_m(s)\| \\
&\qquad = \left(\sup_{n\geq 1}\int_{[0,T]} |DY_n|\right) \sup_{s\in[0,T]} d\big(Y_m(s)), C(X_n(s))\big) \\
&\qquad \leq \left(\sup_{n\geq 1}\int_{[0,T]} |DY_n|\right) \sup_{s\in[0,T]} h\big(C(X_m(s)), C(X_n(s))\big) \\
&\qquad \leq \varepsilon \sup_{n\geq 1}\int_{[0,T]} |DY_n|
\end{aligned}$$

dès que $m \geq n \geq m_0$. En combinant alors la précédente inégalité, (5.5.2) et (5.5.3), on voit que $(Y_n)_n$ est une suite de Cauchy. Donc $(Y_n)_n$ converge uniformément vers une fonction continue à variation bornée $\widetilde{Y}$ avec $\int_{[0,T]} |D\widetilde{Y}| \leq \sup_n \int_{[0,T]} |DY_n|$. D'après le théorème 5.4, $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ est solution du processus de rafle du second ordre $\mathcal{SW}(C, a, b)$. On peut appliquer à présent le corollaire 3.4 à l'intégrande ϕ. On trouve

$$\begin{aligned}
a := \lim_{n\to\infty} &\int_{[0,T]} \phi\big(t, \frac{dDY_n}{d|DY_n|}, X_n(t), Y_n(t)\big)\, d|DY_n|(t) \\
\geq &\int_{[0,T]} \phi\big(t, \frac{dD\widetilde{Y}}{d|D\widetilde{Y}|}, \widetilde{X}(t), \widetilde{Y}(t)\big)\, d|D\widetilde{Y}|(t) ,
\end{aligned}$$

puisque $(X_n, Y_n)_n$ converge uniformément vers $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ et puisque $(DY_n)_n$ converge faiblement vers DY d'après la proposition D. $\square$

6. Appendice : semi-continuité des fonctionnelles intégrales définies sur l'espace des mesures.

Dans cet appendice, on donne plusieurs résultats concernant la semi-continuité des fonctionnelles intégrales définies sur l'espace des mesures à variation bornée.

Le théorème suivant est la généralisation aux mesures vectorielles à valeurs dans un Banach et définies sur un espace polonais d'un résultat de Y. Reshetnyak ([Re, Theorem 2]).

Théorème 6.1. *Soit* $\phi\colon T \times B' \longrightarrow [0, +\infty]$ *une fonction semi-continue inférieurement sur* $T \times B'$ *telle que pour tout* $t \in T$*,* $\phi(t, \cdot)$ *est convexe et positivement* 1*-homogène sur* B'*. Soit* $(m_k)_k$ *une suite bornée tendue dans* $\mathcal{M}^b(T, E')$ *qui converge faiblement vers* $m \in \mathcal{M}^b(T, E')$*. Alors on a*

$$\liminf_k \int_T \phi\big(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\big)\, d|m_k|(t) \geq \int_T \phi\big(t, \frac{dm}{d|m|}(t)\big)\, d|m|(t) .$$

Preuve. Cette preuve suit plusieurs étapes développées par Y. Reshetnyak ([Re], [C5]) dans le cas où T est localement compact et $E = \mathbb{R}^d$ avec certaines modifications

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$a = \liminf_k \int_T \phi\big(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\big)\, d|m_k|(t) = \lim_k \int_T \phi\big(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\big)\, d|m_k|(t) .$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on considère la mesure $\nu_k \in \mathcal{M}^b_+(T \times B', \mathbb{R})$, image de $|m_k|$ par l'application $t \longmapsto \big(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\big), T \longrightarrow T \times B'$. On a ([DM, III(73)]),

$$\nu_k = \int_T \delta_t \otimes \delta_{\left(\frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\right)}\, d|m_k|(t) ,$$

où δ_x est la mesure de Dirac en x. Comme $(m_k)_k$ est bornée et comme $\|\nu_k\| = \int d|m_k| = \|m_k\|$, la suite $(\nu_k)_k$ est aussi bornée. De plus, comme la suite $(m_k)_k$ est tendue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de T tel que $\sup_k |m_k|(T \setminus K) \leq \varepsilon$. On a

$$\nu_k([T \times B'] \setminus [K \times B']) = \nu_k([T \setminus K] \times B') = |m_k|(T \setminus K) .$$

Et donc $\sup_k \nu_k([T \times B'] \setminus [K \times B']) \leq \varepsilon$. Comme $K \times B'$ est compact, cela montre que $(\nu_k)_k$ est tendue. Alors, d'après le théorème de Prokhorov (Théorème 2.1), $(\nu_k)_k$ est relativement faiblement compacte dans l'espace $\mathcal{M}^b_+(T \times B', \mathbb{R})$ des mesures de Radon positives définies sur $T \times B'$; observons que $\mathcal{M}^b_+(T \times B', \mathbb{R})$ muni de la topologie faible est un espace polonais – voir [Bk2, Proposition 5.10]. Ainsi, il existe une sous-suite $(\nu_{k_p})_p$ de $(\nu_n)_n$ et une mesure $\nu \in \mathcal{M}^b_+(T \times B', \mathbb{R})$ telles que $(\nu_{k_p})_p$ converge faiblement vers ν. Comme ϕ est positive et semi-continue inférieurement sur $T \times B'$, l'application $\tau \longmapsto \int \phi\, d\tau$ définie sur $\mathcal{M}^b_+(T \times B', \mathbb{R})$ est faiblement semi-continue inférieurement ([DM, Théorème III.55]). On trouve alors

$$\begin{aligned} a &= \lim_k \int_T \phi\big(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\big)\, d|m_k|(t) = \lim_p \int_{T\times B'} \phi(t,x)\, d\nu_{k_p}(t,x) \\ &\geq \int_{T\times B'} \phi(t,x)\, d\nu(t,x)\ . \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Soit μ la projection de ν sur T définie par

$$\mu = \int_{T\times B'} \delta_t\, d\nu(t,x)\ .$$

Grâce à un résultat de désintégration des mesures (voir [V1, théorème 9], [V2, théorème 2], [C1], [SP], [CV], [IT]), il existe une fonction μ-mesurable $\lambda\colon t \longmapsto \lambda_t$ de T dans l'espace $\mathcal{M}^1_+(B')$ des probabilités de Radon sur B' muni de la topologie faible, telle que

$$\nu = \int_T \delta_t \otimes \lambda_t\, d\mu(t)\ .$$

En reprenant (6.1.1), on trouve

$$a \geq \int_{T\times B'} \phi(t,x)\, d\nu(t,x) = \int_T \int_{B'} \phi(t,x)\, d\lambda_t(x)\, d\mu(t)\ . \tag{6.1.2}$$

Soit à présent $b(\lambda_t) \in B'$ le barycentre de λ_t défini par

$$b(\lambda_t) = \int_{B'} x\, d\lambda_t(x)\ .$$

Comme $b(\lambda)\colon T \longrightarrow B', t \longmapsto b(\lambda_t)$ est mesurable et comme pour chaque $t \in T$, l'application $\phi(t,\cdot)$ est convexe et semi-continue inférieurement sur B', on a

$$\int_{B'} \phi(t,x)\, d\lambda_t(x) \geq \phi(t, b(\lambda_t))\,, \qquad \forall t \in T\ .$$

Il découle alors de (6.1.2) que

$$a \geq \int_T \phi(t, b(\lambda_t))\, d\mu(t)\ . \tag{6.1.3}$$

Montrons à présent que $m = b(\lambda)\mu$. Soit $f \in \mathcal{C}^b(T,E)$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_T f(t)\, dm_k(t) = \int_T \langle f(t), \frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\rangle\, d|m_k|(t) = \int_{T\times B'} \langle f(t), x\rangle\, d\nu_k(t,x)\ .$$

D'un autre coté, comme $(m_{k_p})_p$ converge faiblement vers m, on a

$$\int_T f(t)\, dm(t) = \lim_p \int_T f(t)\, dm_{k_p}(t)\ .$$

De plus, comme $\langle f(\cdot), \cdot\rangle \in \mathcal{C}^b(T \times B', \mathbb{R})$ et comme la suite $(\nu_{k_p})_p$ converge faiblement vers ν, on a

$$\int_{T\times B'} \langle f(t), x\rangle \, d\nu(t,x) = \lim_p \int_{T\times B'} \langle f(t), x\rangle \, d\nu_{k_p}(t,x) \ .$$

En regroupant les trois inégalités précédentes, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_T f(t)\, dm(t) &= \int_{T\times B'} \langle f(t), x\rangle \, d\nu(t,x) = \int_T \int_{B'} \langle f(t), x\rangle \, d\lambda_t(x)\, d\mu(t) \\
&= \int_T \langle f(t), \int_{B'} x\, d\lambda_t(x)\rangle \, d\mu(t) = \int_T \langle f(t), b(\lambda_t)\rangle \, d\mu(t) \\
&= \int_T f(t)\, d(b(\lambda)\mu)(t) \ .
\end{aligned}$$

Cela prouve que $m = b(\lambda)\mu$ et donc que $\dfrac{dm}{d\mu} = b(\lambda)$. On déduit alors de (6.1.3) que

$$a \geq \int_T \phi(t, b(\lambda_t))\, d\mu(t) = \int_T \phi\big(t, \frac{dm}{d\mu}(t)\big)\, d\mu(t) \ . \tag{6.1.4}$$

Soit $|b(\lambda)| \colon T \longrightarrow [0,1], t \longmapsto \|b(\lambda_t)\|$. Comme μ est une mesure positive sur T, on a $d|m| = |b(\lambda)|\, d\mu$ et donc

$$dm = \frac{dm}{d|m|}\frac{d|m|}{d\mu}\, d\mu = \frac{dm}{d|m|} |b(\lambda)|\, d\mu \ .$$

On obtient pour presque tout $t \in T$,

$$\phi\big(t, \frac{dm}{d\mu}(t)\big) = \phi\big(t, \|b(\lambda_t)\| \frac{dm}{d|m|}(t)\big) = \|b(\lambda_t)\| \phi\big(t, \frac{dm}{d|m|}(t)\big) \ .$$

Finalement, en utilisant (6.1.4), on trouve

$$\begin{aligned}
a \geq \int_T \phi\big(t, \frac{dm}{d\mu}(t)\big)\, d\mu(t) &= \int_T \phi\big(t, \frac{dm}{d|m|}(t)\big) \|b(\lambda_t)\|\, d\mu(t) \\
= \int_T \phi\big(t, \frac{dm}{d|m|}(t)\big)\, d(|b(\lambda)|\mu)(t) &= \int_T \phi\big(t, \frac{dm}{d|m|}(t)\big)\, d|m|(t) \ .
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat. □

Remarques 6.2. 1. Le théorème de Reshetnyak montre que les fonctionnelles

$$I_\phi \colon \mathcal{M}^b(T, E') \longrightarrow \mathbb{R}^+ \ , \ m \longmapsto \int_T \phi\big(t, \frac{dm}{d|m|}(t)\big)\, d|m|(t)$$

sont séquentiellement semi-continues inférieurement sur les sous-ensembles bornés tendus de $\mathcal{M}^b(T, E')$.

2. Lorsque T est un espace topologique localement compact (non nécessairement métrisable), C. Castaing a montré dans [C5] le même résultat sans hypothèse de tension sur la suite de mesures.

3. On peut trouver une preuve très différente du théorème de Reshetnyak (avec $E = \mathbb{R}^n$ et $T \subset \mathbb{R}^m$) dans le livre de Buttazzo ([Bu, Theorem 3.4.3]).

On donne maintenant un résultat concernant les fonctionnelles intégrales définies sur l'espace des mesure à variation bornée, associées à une multifonction semi-continues inférieurement *à droite*. Ce résultat est inspiré des travaux de C. Castaing ([C6]), R. Rockafellar ([Ro2]) et M. Valadier ([V3]).

Soit $T > 0$. On considère sur $[0, T]$ la topologie *naturelle* τ et la topologie *droite* τ_d. (Voir Kelley [Ke]). On a $\tau \subset \tau_d$. De plus, il est connu que $([0, T], \tau_d)$ est un espace topologique paracompact ([Ke, p. 172]).

Soit $\mathrm{BRC}([0, T], E)$ l'espace des fonctions bornées continues à droite (i.e., continue sur $[0, T]$ muni de la topologie droite τ_d) de $[0, T]$ dans E. Notons que $\mathrm{BRC}([0, T], E)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}^\infty_E([0, T])$. Ainsi l'intégrale de $u \in \mathrm{BRC}([0, T], E)$ par rapport à $m \in \mathcal{M}^b([0, T], E')$ est définie par

$$\int u\, d|m| = \int_{[0,T]} \langle u(t), \frac{dm}{d|m|}(t) \rangle\, d|m|(t)\ .$$

On munit l'espace $\mathrm{BRC}([0, T], E)$ de la topologie faible induite par la dualité (séparée) avec $\mathcal{M}^b([0, T], E')$.

Une multifonction $\Gamma\colon [0, T] \rightrightarrows E$ à valeurs convexes compactes non-vides est dite *bornée* si $\bigcup_{t\in[0,T]} \Gamma(t)$ est borné dans E.

On note $\mathcal{S}^{\mathrm{BRC}}_\Gamma$ l'ensemble des sélections de Γ continues à droite et par $S^\infty_\Gamma(|m|)$ l'ensemble des sélections de Γ dans $\mathcal{L}^\infty_E([0, T], |m|)$.

Le *cône normal* à $\mathcal{S}^{\mathrm{BRC}}_\Gamma$ en $u \in \mathrm{BRC}([0, T], E)$ par rapport à la dualité avec $\mathcal{M}^b([0, T], E')$ est défini par

$$N_{\mathcal{S}^{\mathrm{BRC}}_\Gamma}(u) := \big\{ m \in \mathcal{M}^b([0, T], E') : \langle u, m\rangle = \delta^*(m, \mathcal{S}^{\mathrm{BRC}}_\Gamma) \big\}\ ,$$

où $\delta^*(\cdot, \mathcal{S}^{\mathrm{BRC}}_\Gamma)$ représente la fonction support de $\mathcal{S}^{\mathrm{BRC}}_\Gamma$ par rapport à la dualité avec $\mathcal{M}^b([0, T], E')$.

Théorème 6.3. *Soit* $\Gamma\colon [0, T] \rightrightarrows E$ *une multifonction bornée semi-continue inférieurement à droite sur* $[0, T]$ *à valeurs convexes compactes non-vides.*

Alors $\mathcal{S}^{\mathrm{BRC}}_\Gamma$ *est un convexe faiblement compact non-vide de* $\mathrm{BRC}([0, T], E)$ *et la fonction support de* $\mathcal{S}^{\mathrm{BRC}}_\Gamma$ *est donnée par la formule*

$$\delta^*(m, \mathcal{S}^{\mathrm{BRC}}_\Gamma) = \int_{[0,T]} \delta^*\big(\frac{dm}{d|m|}(t), \Gamma(t)\big)\, d|m|(t)$$

pour tout $m \in \mathcal{M}^b([0, T], E')$.

De plus, le cône normal à $\mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ *en* $u \in \mathrm{BRC}([0,T],E)$ *est donné par*

$$N_{\mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}}(u) = \left\{ m \in \mathcal{M}^b([0,T],E') : \frac{dm}{d|m|}(t) \in N_{\Gamma(t)}(u(t)) \ \ |m|\text{-}p.p. \right\}$$

où $N_{\Gamma(t)}(u(t))$ *est le cône normal à* $\Gamma(t)$ *au point* $u(t)$*.*

Preuve. La non-vacuité de $\mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ provient du théorème de sélection de Michael ([Mi]): comme $([0,T],\tau_d)$ est un espace topologique paracompact, et comme la multifonction $\Gamma\colon ([0,T],\tau_d) \Longrightarrow E$ est semi-continue inférieurement et bornée, il existe une sélection bornée et τ_d-continue u de Γ.

La convexité de $\Gamma(t)$ implique celle de $\mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$. Montrons que $\mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ est fermé pour la topologie faible : soit $(u_\alpha)_\alpha$ une suite généralisée dans $\mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ qui converge vers un $u \in \mathrm{BRC}([0,T],E)$. Pour tout $x' \in E'$ et $t \in [0,T]$, $x'\delta_t$ est dans $\mathcal{M}^b([0,T],E')$. On a donc

$$\langle u_\alpha(t), x' \rangle = \langle u_\alpha, x'\delta_t \rangle \underset{\alpha}{\longrightarrow} \langle u, x'\delta_t \rangle = \langle u(t), x \rangle \ .$$

Cela veut dire que $(u_\alpha(t))$ converge faiblement vers $u(t)$. Comme $\Gamma(t)$ est fermé, $u(t) \in \Gamma(t)$. Donc $u \in \mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$.

Soit $\psi\colon [0,T]_{\tau_d} \times E \longrightarrow [0,+\infty]$ et $\phi\colon [0,T]_{\tau_d} \times E' \longrightarrow]-\infty,+\infty]$ les deux fonctions semi-continues inférieurement définies par

$$\psi(t,x) = \delta\left(x, \Gamma(t)\right) \ , \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times E \ ,$$

c'est-à-dire la fonction indicatrice de $\Gamma(t)$ et x et

$$\phi(t,x') = \delta^*\left(x', \Gamma(t)\right) \ , \qquad \forall (t,x') \in [0,T] \times E' \ ,$$

c'est-à-dire la fonction support de $\Gamma(t)$ en x'.

Soit $\overline{m}$ quelconque dans $\mathcal{M}^b([0,T],E')$. Soit $I_\psi\colon L_E^\infty([0,T],|\overline{m}|) \longrightarrow]-\infty,+\infty]$ et $I_\phi\colon L_{E'}^1([0,T],|\overline{m}|) \longrightarrow]-\infty,+\infty]$ les fonctionnelles intégrales associées à ψ et ϕ.

A l'aide d'un résultat standard de dualité ([CV, Corollary VII.15]), on trouve pour tout $v \in L_{E'}^1([0,T],|\overline{m}|)$,

$$I_\phi(v) = (I_\psi)^*(v) = \sup\left\{ \langle v,u \rangle - I_\psi(u) : u \in L_E^\infty([0,T],|\overline{m}|) \right\} \ .$$

Comme $\frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|} \in L_{E'}^1([0,T],|\overline{m}|)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{[0,T]} \delta^*\Big(\frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t), \Gamma(t)\Big)\, d|\overline{m}|(t) &= \sup\left\{ \int_{[0,T]} \langle u, \frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t) \rangle \, d|\overline{m}|(t) : u \in \mathcal{S}_\Gamma^\infty(|\overline{m}|) \right\} \\
&\geq \sup\left\{ \int_{[0,T]} \langle u, \frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t) \rangle \, d|\overline{m}|(t) : u \in \mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}} \right\} \\
&= \delta^*\big(m, \mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}\big) \ .
\end{aligned}$$

Il reste à montrer l'inégalité inverse. Pour cela, soit $\overline{u} \in S_\Gamma^\infty(|\overline{m}|)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha < \int_{[0,T]} \langle \overline{u}(t), \frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t) \rangle \, d|\overline{m}|(t) \; . \tag{6.3.1}$$

Il suffit de montrer qu'il existe un u dans $\mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ tel que

$$\alpha < \int_{[0,T]} \langle u(t), \frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t) \rangle \, d|\overline{m}|(t) \; .$$

Soit $\beta > 0$ suffisamment grand pour que $\|\overline{u}\|_\infty < \beta$ et soit $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$\alpha < \int_{[0,T]} \langle \overline{u}(t), \frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t) \rangle \, d|\overline{m}|(t) - 2\beta\varepsilon \; . \tag{6.3.2}$$

D'après le théorème de Lusin, il existe un ensemble K τ-compact (et donc τ_d-fermé) tel que $|\overline{m}|([0,T] \setminus K) < \varepsilon$ et tel que $\overline{u}$ soit τ-continue (et donc τ_d-continue) sur K. On considère alors la multifonction $\Lambda \colon [0,T] \Longrightarrow E$ définie pour tout $t \in [0,T]$ par

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \overline{u}(t), & \text{si } t \in K, \\ \Gamma(t) \cap B(0,\beta), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que Λ est à valeurs convexes non-vides. Montrons que $\mathrm{cl}\,\Lambda$ est τ_d-semi-continue inférieurement. (Ici, $\mathrm{cl}\,\Lambda(t) = \mathrm{cl}(\Lambda(t))$.) Soit U un ouvert de E. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}\,\Lambda^-(U) &= \{t \in [0,T] : \mathrm{cl}\,\Lambda(t) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in [0,T] : \Lambda(t) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in [0,T] : \Gamma(t) \cap (U \cap B(0,\beta)) \neq \emptyset\} \setminus \{t \in K : \overline{u}(t) \notin U\} \; . \end{aligned}$$

Comme U est ouvert, grâce à la τ_d-semi-continuité inférieure de Γ et à la τ_d-continuité de $\overline{u}$, l'ensemble $\mathrm{cl}\,\Lambda^-(U)$ est ouvert dans $[0,T]_{\tau_d}$. Cela prouve la τ_d-semi-continuité inférieure de $\mathrm{cl}\,\Lambda$.

Ainsi, par le théorème de Michael ([Mi]), il existe une sélection τ_d-continue u de $\mathrm{cl}\,\Lambda$. Comme u est forcément bornée, $u \in \mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$. Puisque $u = \overline{u}$ sur K, en utilisant (6.3.1) et (6.3.2), on trouve

$$\begin{aligned} \int_{[0,T]} \langle u(t), \frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t) \rangle \, d|\overline{m}|(t) &= \int_{[0,T]} \langle \overline{u}(t), \frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t) \rangle \, d|\overline{m}|(t) \\ &\qquad + \int_{[0,T]\setminus K} \langle u(t) - \overline{u}(t), \frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t) \rangle \, d|\overline{m}|(t) \\ &\geq \int_{[0,T]} \langle \overline{u}(t), \frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t) \rangle \, d|\overline{m}|(t) - 2\beta \, |\overline{m}|([0,T] \setminus K) \\ &> \alpha \; . \end{aligned}$$

Cela prouve la première partie du théorème.

Soit $u \in \mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$. D'après la première partie de la preuve, on a

$$\begin{aligned}
N_{\mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}}(u) &= \left\{m \in \mathcal{M}^b([0,T],E') : \langle u, m\rangle = \delta^*\big(m, \mathcal{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}\big)\right\}\\
&= \Bigg\{m \in \mathcal{M}^b([0,T],E') :\\
&\qquad \int_{[0,T]} \left[\delta^*\big(\frac{dm}{d|m|}(t), \Gamma(t)\big) - \langle u(t), \frac{dm}{d|m|}(t)\rangle\right] \, d|m|(t) = 0\Bigg\}\\
&= \left\{m \in \mathcal{M}^b([0,T],E') : \delta^*\big(\frac{dm}{d|m|}(t), \Gamma(t)\big) - \langle u(t), \frac{dm}{d|m|}(t)\rangle = 0 \ |m|\text{-p.p.}\right\}\\
&= \left\{m \in \mathcal{M}^b([0,T],E') : \frac{dm}{d|m|}(t) \in \partial\left[\delta\big(\cdot, \Gamma(t)\big)\right](u(t)) \ |m|\text{-p.p.}\right\} ,
\end{aligned}$$

où $\partial\left[\delta\big(\cdot,\Gamma(t)\big)\right](u(t))$ est le sous-différentiel de $\delta\big(\cdot,\Gamma(t)\big)$ en $u(t)$. Comme ce sous-différentiel est en fait le cône normal à $\Gamma(t)$ en $u(t)$ ([Ro1]), cela prouve la seconde partie du théorème. $\square$

7. Appendice : produit de mesures.

Dans cet appendice, on prouve deux lemmes qu'on a utilisés dans la section 3. Ces résultats sont classiques pour les mesures réelles définies sur un espace topologique *localement compact*. (Voir [Bk, Chap. III, §4], [Di2].) Par précaution, on donne ici les preuves complètes de ces résultats pour des mesures vectorielles définies sur un espace polonais.

Lemme 7.1. *Soit S un espace polonais. Soit $m \in \mathcal{M}^b(T,E')$ et $\lambda \in \mathcal{M}^b(S,\mathbb{R})$. Alors il existe une mesure unique $m \otimes \lambda$ dans $\mathcal{M}^b(T \times S, E')$ telle que*

$$m \otimes \lambda(A \times B) = m(A)\,\lambda(B)\,, \qquad \forall (A,B) \in \mathcal{B}(T) \times \mathcal{B}(S)\ .$$

De plus, on a

$$|m \otimes \lambda| = |m| \otimes |\lambda|$$

et

$$\frac{d(m\otimes\lambda)}{d|m\otimes\lambda|} = \frac{dm}{d|m|} \otimes \frac{d\lambda}{d|\lambda|}\,, \qquad |m\otimes\lambda|\text{-p.p.}\ ,$$

c'est-à-dire, pour $|m\otimes\lambda|$-presque tout $(t,s) \in T \times S$,

$$\frac{d(m\otimes\lambda)}{d|m\otimes\lambda|}(t,s) = \frac{dm}{d|m|}(t)\,\frac{d\lambda}{d|\lambda|}(s)\ .$$

Preuve. D'après la régularité de la mesure bornée $|m|$, il existe une suite $(K_p)_p$ de compacts de T et un $|m|$-négligeable N dans T tels que $\{N, K_p : p \in \mathbb{N}\}$ soit une partition borélienne de T. D'après la régularité de la mesure bornée $|\lambda|$, il existe une suite $(L_q)_q$ de compacts de S et une $|\lambda|$-négligeable M dans S tel que $\{M, L_q : q \in \mathbb{N}\}$ soit une partition borélienne de S.

Pour chaque $(n,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on considère les mesures $m_p \in \mathcal{M}^b(T, E')$ et $\lambda_q \in \mathcal{M}^b(S, \mathbb{R})$ à support compact supp$(m_p) = K_p$, supp$(\lambda_q) = L_q$ définies par

$$m_p(A) = m(A \cap K_p)\,, \qquad \forall A \in \mathcal{B}(T)\ ,$$
$$\lambda_q(B) = \lambda(B \cap L_q)\,, \qquad \forall B \in \mathcal{B}(S)\ .$$

On a $m = \sum_p m_p$, $|m| = \sum_p |m_p|$ et $\lambda = \sum_q \lambda_q$, $|\lambda| = \sum_q |\lambda_q|$. Par [Di2, §22], il existe[6] une mesure $\nu_p^q = m_p \otimes \lambda_q$ dans $\mathcal{M}^b(T \times S, E')$ telle que

(1) $\nu_p^q(A \times B) = m_p(A)\lambda_q(B), \quad \forall (A,B) \in \mathcal{B}(T) \times \mathcal{B}(S)$;
(2) $|\nu_p^q| = |m_p| \otimes |\lambda_q|$;
(3) supp$(\nu_p^q) =$ supp$(m_p) \times$ supp$(\lambda_q) = K_p \times L_q$.

Pour tout $C \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{B}(S) = \mathcal{B}(T \times S)$, comme

$$\begin{aligned}\|\nu_p^q(C)\| = \|m_p \otimes \lambda_q(C)\| &\le |m_p \otimes \lambda_q|(C) = |m_p \otimes \lambda_q|(C \cap [K_p \times L_q]) \\ &\le |m_p|(K_p)\,|\lambda_q|(L_q)\ ,\end{aligned}$$

la série $\sum_{p,q} \nu_p^q(C)$ est absolument convergente. On pose alors

$$\nu(C) = \sum_{p,q} \nu_p^q(C) = \sum_{p,q} m_p \otimes \lambda_q(C)\ .$$

Par l'absolue convergence, ν est une mesure sur $T \times S$. De plus, puisque pour $(p,q) \neq (p',q')$, supp$(m_p \otimes \lambda_q) \cap$ supp$(m_{p'} \otimes \lambda_{q'}) = \emptyset$, on a

$$\begin{aligned}|\nu|(C) &= \big|\sum_{p,q} m_p \otimes \lambda_q\big|(C) = \sum_{p,q} |m_p \otimes \lambda_q|(C) \\ &= \sum_{p,q} |m_p| \otimes |\lambda_q|(C) = \big(\sum_p |m_p|\big) \otimes \big(\sum_q |\lambda_q|\big)(C) \\ &= |m| \otimes |\lambda|(C)\ .\end{aligned}$$

On en déduit que ν est une mesure bornée sur $T \times S$ puisque $|\nu| \otimes |\lambda| \in \mathcal{M}^b(T \times S, \mathbb{R})$. C'est-à-dire $\nu \in \mathcal{M}^b(T \times S, E')$. On pose $m \otimes \lambda = \nu$. Finalement, l'unicité de ν provient de [Di1, §8].

[6] En fait, on considère la restriction $\widetilde{m}_p$ (resp. $\tilde{\lambda}_q$) de la mesure m_p (resp. λ_q) au compact K_p (resp. L_q). Alors, par [Di2, §22], il existe une mesure $\tilde{\nu}_p^q = \widetilde{m}_p \otimes \tilde{\lambda}_q$ dans $\mathcal{M}(K_p \times L_q, E')$ produit de $\widetilde{m}_p$ avec $\tilde{\lambda}_q$. On étend alors $\tilde{\nu}_p^q$ en une mesure ν_p^q de $\mathcal{M}^b(T \times S, E')$ en posant $\nu_p^q(C) = \tilde{\nu}_p^q(C \cap [K_p \times L_q])$ pour tout $C \in \mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(T)$.

Montrons maintenant que $|m \otimes \lambda|$-presque partout,

$$\frac{d(m\otimes\lambda)}{d|m\otimes\lambda|} = \frac{dm}{d|m|} \otimes \frac{d\lambda}{d|\lambda|} \ . \tag{7.1.1}$$

Soit $(A, B) \in \mathcal{B}(T) \times \mathcal{B}(S)$. On a

$$\begin{aligned} m\otimes\lambda(A\times B) = m(A)\lambda(B) &= \int_A \frac{dm}{d|m|}(t)\, d|m|(t) \int_B \frac{d\lambda}{d|\lambda|}(s)\, d|\lambda|(s) \\ &= \int_{A\times B} \frac{dm}{d|m|}(t)\, \frac{d\lambda}{d|\lambda|}(s)\, d|m|(t)\, d|\lambda|(s) \\ &= \int_{A\times B} \frac{dm}{d|m|} \otimes \frac{d\lambda}{d|\lambda|}(t,s)\, d|m\otimes\lambda|(t,s) \ . \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{B}(T \times S)$ est engendré par les ensembles de la forme $A \times B$, cela prouve (7.1.1). □

Remarque 7.2. Comme remarqué par M. Valadier, on peut aussi montrer ce lemme en utilisant la mesure $\nu \in \mathcal{M}^b(T \times S, E')$ définie par

$$\nu(C) = \int_C \frac{dm}{d|m|} \otimes \frac{d\lambda}{d|\lambda|}(t,s)\, d(|m|\otimes|\lambda|)(t,s)\,, \qquad \forall C \in \mathcal{B}(T\times S) \ .$$

Lemme 7.3. *Soit S un espace polonais. Alors l'application* produit $\Pi\colon \mathcal{M}^b(T, E') \times \mathcal{M}^b(S, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}^b(T \times S, E'), (m, \lambda) \longmapsto m \otimes \lambda$ *est continue sur les sous-ensembles $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ de $\mathcal{M}^b(T, E') \times \mathcal{M}^b(S, \mathbb{R})$ où $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble borné et tendu de $\mathcal{M}^b(T, E')$ et $\mathcal{K}$ est un sous-ensemble borné et tendu de $\mathcal{M}^b(S, \mathbb{R})$. De plus,* $\Pi(\mathcal{H} \times \mathcal{K})$ *est borné et tendu dans $\mathcal{M}^b(T \times S, E')$.*

Preuve. Remarquons d'abord que Π est continue sur $\mathcal{M}^b(T, E') \times \mathcal{M}^b(S, \mathbb{R})$ lorsque $\mathcal{M}^b(T \times S, E')$ est muni de la topologie τ de la convergence simple sur $\mathcal{C}^b(T, E) \otimes \mathcal{C}^b(S, \mathbb{R})$. Cela provient de l'égalité

$$\Big\langle \sum_{i=1}^k f_i \otimes g_i, m\otimes\lambda \Big\rangle = \sum_{i=1}^k \langle f_i, m\rangle\langle g_i, \lambda\rangle \ ,$$

pour tout élément $\sum_{i=1}^k f_i \otimes g_i$ de $\mathcal{C}^b(T, E) \otimes \mathcal{C}^b(S, \mathbb{R})$ et tout $(m, \lambda) \in \mathcal{M}^b(T, E') \times \mathcal{M}^b(S, \mathbb{R})$. La topologie τ est séparée et plus faible que la topologie faible sur $\mathcal{M}^b(T \times S, E')$. D'après le théorème de Prokhorov (Théorème 2.1) un sous-ensemble borné tendu de $\mathcal{M}^b(T \times S, E')$ est relativement faiblement compact. La topologie τ coïncide donc avec la topologie faible sur les sous-ensembles bornés tendus de $\mathcal{M}^b(T \times S, E')$. Il suffit donc de montrer que $\Pi(\mathcal{H} \times \mathcal{K})$ est borné et tendu dans $\mathcal{M}^b(T \times S, E')$. D'après le lemme 7.1, pour tout $(m, \lambda) \in \mathcal{M}^b(T, E') \times \mathcal{M}^b(S, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \|m\otimes\lambda\| = |m\otimes\lambda|(T\times S) &= |m|\otimes|\lambda|(T\times S) \\ &= |m|(T)\,|m|(S) = \|m\|\,\|\lambda\| \ . \end{aligned}$$

Donc $\Pi(\mathcal{H}\times\mathcal{K})$ est borné. Montrons qu'il est aussi tendu. Soit $a = \sup\{\|m\| : m \in \mathcal{H}\}$ et $b = \sup\{\|\lambda\| : \lambda \in \mathcal{K}\}$. Comme $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ est tendu, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de T et un compact L_ε de S tels que

$$\begin{aligned} |m|(T \setminus K_\varepsilon) &\leq \frac{\varepsilon}{2b}\,, \qquad \forall m \in \mathcal{H}\,, \\ |\lambda|(S \setminus L_\varepsilon) &\leq \frac{\varepsilon}{2a}\,, \qquad \forall \lambda \in \mathcal{K}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, on a pour tout $(m,\lambda) \in \mathcal{H}\times\mathcal{K}$,

$$\begin{aligned} |m\otimes\lambda|([T\times S]\setminus[K_\varepsilon\times L_\varepsilon]) &\leq |m|\otimes|\lambda|([T\times(S\setminus L_\varepsilon)]\cup[(T\setminus K_\varepsilon)\times S]) \\ &\leq |m|(T)\,|\lambda|(S\setminus L_\varepsilon) + |m|(T\setminus K_\varepsilon)\,|\lambda|(S) \\ &\leq a\frac{\varepsilon}{2a} + \frac{\varepsilon}{2b}b \\ &\leq \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Cela prouve que $\Pi(\mathcal{H}\times\mathcal{K})$ est tendu. $\square$

CHAPITRE III

SEMI-CONTINUITÉ, APPROXIMATION ET CONVERGENCE DES APPLICATIONS VECTORIELLES

1. Introduction.

Il est classiquement connu que si ψ est une application semi-continue inférieurement d'un espace métrique (X, d) dans $[0, +\infty]$, alors il existe une suite $(\psi^k)_k$ d'applications lipschitziennes croissant vers ψ donnée par la formule

$$\forall x \in X, \quad \psi^k(x) = \inf_{y \in X} \{\psi(y) + kd(x, y)\} .$$

Cette approximation est très utile pour traiter des problèmes de semi-continuité inférieure ([Bu]), de représentation intégrale ([Bu], [C4]) et d'épi-convergence ([A], [AW1], [AW2], [CE], [H]) — voir aussi la preuve du théorème I.5.7. Récemment, A. Gavioli a établi un résultat d'approximation lipschitzienne pour les multifonctions semi-continues supérieurement ([Ga]).

Notre but est de trouver une approximation du même type (i.e., donnée par une *formule*) pour les applications à valeurs dans un treillis de Banach. Pour cela, on rappelle d'abord quelques résultats de convergence dans un treillis de Banach (3ème section), et on introduit une nouvelle notion de semi-continuité inférieure pour les applications vectorielles (4ème section). Dans la 5ème section, on donne un résultat d'approximation lipschitzienne pour les applications à valeurs dans un treillis de Banach. Dans la 6ème section, on introduit une notion de convergence pour les applications vectorielles généralisant la notion d'épi-convergence des fonctions à valeurs réelles (voir [A]) et on relie cette convergence avec la convergence des approximations.

2. Notations.

Soit E un treillis de Banach complet pour l'ordre[7] (voir le livre de Peressini [P] ou celui de Schaefer [Sc, Chapter II]) : E est un espace de Banach de norme $\|\cdot\|$,

[7] Dans toute la suite, on pourra considérer que E est l'espace $L^p([0,1], \lambda)$ avec $1 < p < +\infty$, muni de l'ordre naturel.

partiellement ordonné dans lequel toute partie non vide majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure). De plus, E doit vérifier la propriété $(*)$ ci-après.

On note $\leq$ l'ordre sur E. On note $E_+ = \{e \in E : e \geq 0\}$ le cône positif de E et $E_+^1 = \{e \in E_+ : \|e\| \leq 1\}$. La valeur absolue $|e|$ de $e \in E$ est définie par $|e| = \sup\{e, -e\}$. Les points de E vérifient la propriété suivante :

$$\forall e, f \in E, \quad |e| \leq |f| \Longrightarrow \|e\| \leq \|f\| \,. \tag{$*$}$$

On dit qu'un sous-ensemble C de E est ordre-convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall z \in E, \quad x \leq z \leq y \implies z \in C \,.$$

Remarquons que E_+ est un cône fermé *normal* i.e., tout point de E admet une base de voisinages ordre-convexes ([P, Propositions II.4.7 & II.4.13] ou [Sc, Proposition II.5.2]).

On ajoute à E un plus grand élément $+\infty$ et un plus petit élément $-\infty$. On note $\overline{E} = E \cup \{-\infty, +\infty\}$, $E^\bullet = E \cup \{+\infty\}$ et $E_+^\bullet = E_+ \cup \{+\infty\}$. On étend les opérations de E à $\overline{E}$ en posant

$$\begin{cases} (+\infty) + e = +\infty, & \forall e \in \overline{E} \\ (-\infty) + e = -\infty, & \forall e \in E \cup \{-\infty\} \\ 0e = 0, & \forall e \in \overline{E} \\ t\omega = \omega,\ (-t)\omega = -\omega, & \forall \omega \in \{-\infty, +\infty\},\ t \in \mathbb{R}_+^* \,. \end{cases}$$

Soit A un sous-ensemble non vide de $\overline{E}$. On a $\sup A = +\infty$ si $+\infty$ est le plus petit élément de $\overline{E}$ qui majore A. On définit aussi $\operatorname{tsup} A$ (*suprémum topologique*) par $\operatorname{tsup} A = \sup A$ si $\sup A \in E$ et $\operatorname{tsup} A = +\infty$ si pour tout $e \in E$ et tout voisinage V de 0 dans E, il existe $a \in A$ tel que $a \in e + V + E_+^\bullet$. On a bien sûr (voir lemme 3.9) que $\operatorname{tsup} A = +\infty$ implique que $\sup A = +\infty$. La réciproque est en général fausse, i.e., le suprémum de A peut être égal à $+\infty$ sans que $\operatorname{tsup} A$ existe. Cette notion est plus faible que celle d'isosup de [BPT].

Dans toute la suite, (X, d) désigne un espace métrique. On note $B(x, r)$ (resp. $B(e, r)$) la boule ouverte de X (resp. E) de centre $x \in X$ (resp. $e \in E$) et de rayon r.

3. Résultats de convergence. Rappels.

On rappelle quelques notions et résultats de convergence dans le treillis de Banach complet E.

Lemme 3.1. ([Sc, Lemma II.5.8]) *Soit $(e_n)_n$ une suite croissante dans E qui converge en norme vers e. Alors $e = \sup_n e_n$.*

Lemme 3.2. ([Sc, Lemma II.5.8 & Theorem II.5.11]) *Supposons que E est réflexif. Soit $(e_n)_n$ une suite croissante bornée en norme dans E. Alors elle converge en norme vers $e = \sup_n e_n$.*

Définition 3.3. ([Sc, Definition II.5.12 & Theorem II.5.10]) On dit que E possède une norme *ordre-continue* si toute suite dans E décroissant vers 0 converge en norme vers 0. En particulier, si E est réflexif, E possède une norme ordre-continue.

Lemme 3.4. *Supposons que E possède une norme ordre-continue. Soit $(e_n)_n$ une suite croissante et majorée dans E. Alors elle converge en norme vers $e = \sup_n e_n$.*

On introduit une notion de limite inférieure (resp. supérieure) dans $\overline{E}$:

Définition 3.5. Soit $(e_n)_n$ une suite dans $\overline{E}$. On définit la *limite inférieure* et *supérieure* de la suite $(e_n)_n$ par :

$$\underline{\lim}_n e_n = \sup_n \inf_{k \geq n} e_k \ , \qquad \overline{\lim}_n e_n = \inf_n \sup_{k \geq n} e_k \ .$$

Lorsque E possède une norme ordre-continue, on a

$$\underline{\lim}_n e_n \in E \implies \underline{\lim}_n e_n = \lim_n \inf_{k \geq n} e_k \ ,$$
$$\overline{\lim}_n e_n \in E \implies \overline{\lim}_n e_n = \lim_n \sup_{k \geq n} e_k \ .$$

Définition 3.6. ([P, Definitions I.5.1 & I.5.3]) Une suite $(e_n)_n$ dans $\overline{E}$ *converge pour l'ordre* vers e si $e = \underline{\lim}_n e_n = \overline{\lim}_n e_n$. Elle $*$*-converge pour l'ordre* vers e si toute sous-suite de $(e_n)_n$ admet une suite extraite qui converge pour l'ordre vers e.

Proposition 3.7. *Soit $(e_n)_n$ une suite dans E et $e \in E$.*

a) *Si $(e_n)_n$ converge en norme vers $e \in E$, elle $*$-converge pour l'ordre vers e.*

b) *Réciproquement, si E possède une norme ordre-continue et si $(e_n)_n$ $*$-converge pour l'ordre vers e alors elle converge en norme vers e.*

Preuve. Je n'ai pas réussi à trouver dans la littérature (en particulier dans [Sc] et [P]) ce résultat énoncé tel quel. J'en donne donc ici une démonstration rapide. La première partie est extraite de [P, Proposition IV.2.4].

Il est clair que l'on peut supposer $e = 0$. Soit alors $(e_n)_n$ une suite de E convergeant en norme vers 0 et $(f_n)_n$ une sous-suite de $(e_n)_n$. Comme l'application $e \longmapsto |e|$ est continue, la suite $(|f_n|)_n$ converge aussi en norme vers 0. Il existe donc une sous-suite $(|f_{n_k}|)_k$ de $(|f_n|)_n$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k|f_{n_k}| \in B(0, 2^{-k})$. On a alors pour tout $m, p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=m+1}^{m+p} k|f_{n_k}| \in B(0, 2^{-m}) \ .$$

La suite $(g_m)_m = \left(\sum_{k=1}^m k|f_{n_k}|\right)_m$ est donc une suite de Cauchy dans E. Il existe alors $g \in E_+$ tel que $(g_m)_m$ converge vers g en norme. D'après le lemme 3.1, $g = \sup_m g_m$ et par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $|f_{n_k}| \leq \frac{1}{k} g$. En particulier

$$\forall k \in \mathbb{N} \,, \qquad \frac{1}{k} g \geq f_{n_k} \geq -\frac{1}{k} g \,.$$

D'où

$$0 = \overline{\lim_k} \left(\frac{1}{k} g\right) \geq \overline{\lim_k} f_{n_k} \geq \underline{\lim_k} f_{n_k} \geq \underline{\lim_k} \left(-\frac{1}{k}\right) g = 0 \,.$$

Ce qui prouve que $(f_{n_k})_k$ converge pour l'ordre vers 0 et par suite, la suite $(e_n)_n$ $*$-converge pour l'ordre vers 0.

Réciproquement, soit $(e_n)_n$ une suite qui $*$-converge pour l'ordre vers 0. Il suffit de montrer que de toute sous-suite de $(e_n)_n$ on peut extraire une sous-suite qui converge en norme vers 0. Soit donc $(f_n)_n$ une sous-suite de $(e_n)_n$. Il existe une suite extraite $(f_{n_p})_p$ qui converge pour l'ordre vers 0. Soit V un voisinage de 0 et $\widetilde{V}$ un voisinage ordre-convexe de 0 inclus dans V. Comme E possède une norme ordre-continue, il existe $p \in \mathbb{N}$ assez grand tel que

$$\inf_{k \geq p} f_{n_k} \in \widetilde{V} \,, \qquad \sup_{k \geq p} f_{n_k} \in \widetilde{V} \,.$$

De plus, pour tout $k \geq p$, on a

$$\inf_{k \geq p} f_{n_k} \leq f_{n_k} \leq \sup_{k \geq p} f_{n_k} \,.$$

Comme $\widetilde{V}$ est ordre convexe, on en déduit que pour tout $k \geq p$, $f_{n_k} \in \widetilde{V}$. Ce qui prouve que la suite $\left(f_{n_p}\right)_p$ converge vers 0 en norme. □

Remarque 3.8. Si E_+ est d'intérieur non vide, la convergence pour l'ordre est équivalente à la convergence en norme dans E. En particulier, E possède une norme ordre-continue.

Lemme 3.9. *Soit A un sous-ensemble de E. Alors* tsup $A = +\infty$ *implique que* sup $A = +\infty$.

Preuve. Soit $e \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A$ tel que $a_n \in e + B(0, 1/n) + E_+^\bullet$. Il existe donc $e_n \in B(0, 1/n)$ tel que sup $A \geq a_n \geq e + e_n$. Comme la suite $(e_n)_n$ converge vers 0 en norme et comme le cône E_+ est fermé, on a sup $A \geq \lim_n (e + e_n) = e$. Comme e est quelconque dans E, on en déduit le résultat. □

Lemme 3.10. *On suppose que E possède une norme ordre-continue. Soit $(e_n)_n$ et $(h_n)_n$ deux suites de $\overline{E}$. On a*

$$\underline{\lim_n}(e_n + h_n) \leq \underline{\lim_n}\, e_n + \overline{\lim_n}\, h_n \,.$$

Preuve. On peut supposer que toutes les limites sont dans E. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \geq n$, on a $e_k + h_k \leq e_k + \sup_{j \geq n} h_j$. Il en découle que

$$\inf_{k \geq n} (e_k + h_k) \leq \inf_{k \geq n} (e_k + \sup_{j \geq n} h_j) = \inf_{k \geq n} e_k + \sup_{k \geq n} h_k \ ,$$

et donc

$$\lim_n \inf_{k \geq n} (e_k + h_k) \leq \lim_n \inf_{k \geq n} e_k + \lim_n \sup_{k \geq n} h_k \ .$$

C'est à dire

$$\varliminf_n (e_n + h_n) \leq \varliminf_n e_n + \varlimsup_n h_n \ .$$

Ce qui finit la preuve. $\square$

4. Inf-continuité.

On introduit une nouvelle notion de semi-continuité inférieure pour les applications de X dans $E^\bullet$. Par commodité, pour toute application $\psi \colon X \longrightarrow E^\bullet$ et tout $U \subset X$, on note $\inf \psi(U) = \inf\{\psi(x) : x \in U\}$.

Définition 4.1. Soit $\psi \colon X \longrightarrow E^\bullet$ une application. On dit que ψ est *propre* s'il existe $x \in X$ tel que $\psi(x) \in E$. On définit le *domaine* (*effectif*) de ψ par $\mathrm{dom}(\psi) = \{x \in X : \psi(x) \in E\}$.

On dit que ψ est *inf-continue* en $x \in X$ si pour tout voisinage V de 0 dans E et pour tout $e \in E$ avec $e \leq \psi(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $\inf \psi(U) \in e + V + E_+^\bullet$. On dit que ψ est inf-continue (sur X) si elle est inf-continue en tout point de X.

Exemple 4.2. Soit $\phi \colon X \longrightarrow \mathbb{R}^\bullet$ une application semi-continue inférieurement et $e \in E_+^\bullet$. Alors l'application $\psi \colon X \longrightarrow E, x \longmapsto \phi(x)e$ est inf-continue.

Proposition 4.3. *Soit $\psi \colon X \longrightarrow E^\bullet$ une application et $x \in \mathrm{dom}(\psi)$. Alors ψ est inf-continue en x si et seulement si pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe un voisinage U de x tel que* $\inf \psi(U) \in \psi(x) + V$.

Preuve. Supposons que ψ est inf-continue en x. Soit V un voisinage de 0 dans E. Comme E_+ est normal, il existe une voisinage ordre-convexe $\widetilde{V}$ de 0 inclus dans V. Il existe alors un voisinage U de x tel que $\inf \psi(U) \in \psi(x) + \widetilde{V} + E_+^\bullet$. Il existe donc $v \in \widetilde{V}$ tel que $\inf \psi(U) \geq \psi(x) + v$. D'autre part on a $\inf \psi(U) \leq \psi(x)$ et $\psi(x) \in \psi(x) + \widetilde{V}$. Comme $\widetilde{V}$ est ordre-convexe, on en déduit que $\inf \psi(U) \in \psi(x) + \widetilde{V} \subset \psi(x) + V$.

Réciproquement, soit V un voisinage de 0 dans E et $e \in E$ tel que $e \leq \psi(x)$. Il existe alors un voisinage U de x tel que $\inf \psi(U) \in \psi(x) + V$. D'où $\inf \psi(U) \in e + V + E_+^\bullet$. $\square$

Proposition 4.4. *Soit $\psi\colon X \longrightarrow E^\bullet$ une application et $\Gamma\colon X \rightrightarrows E$ la multiapplication définie pour tout $y \in X$ par $\Gamma(y) = \{e \in E : e \leq \psi(y)\}$. Alors ψ est inf-continue en $x \in X$ si et seulement si la multiapplication Γ est* inf-continue *en x, i.e., pour tout ouvert V de E tel que $\Gamma(x) \cap V \neq \emptyset$, il existe un voisinage U de x tel que*

$$\left[\bigcap_{y\in U} \Gamma(y)\right] \cap V \neq \emptyset \;.$$

Preuve. Supposons ψ inf-continue en x. Soit V un ouvert de E tel que $\Gamma(x) \cap V \neq \emptyset$. Il existe donc $e \in V$ tel que $e \leq \psi(x)$. D'après l'inf-continuité de ψ en x, il existe un voisinage U de x tel que $\inf \psi(U) \in e + (V - e) + E_+^\bullet = V + E_+^\bullet$. Il existe donc $f \in V$ tel que

$$\forall y \in U \;, \quad \psi(y) \geq \inf \psi(U) \geq f \;.$$

D'où

$$f \in \bigcap_{y\in U} \Gamma(y) \;.$$

Ce qui prouve l'inf-continuité de Γ en x.

Réciproquement, supposons que Γ est inf-continue en x. Soit V un voisinage ouvert ordre-convexe de 0 et $e \in E$ tel que $e \leq \psi(x)$. On a $\Gamma(x) \cap (e + V) \neq \emptyset$. Il existe donc un voisinage U de x tel que

$$\left[\bigcap_{y\in U} \Gamma(y)\right] \cap (e + V) \neq \emptyset \;.$$

Il existe alors $f \in V$ tel que pour tout $y \in U$, $e + f \in \Gamma(y)$ ou encore $\psi(y) \geq e + f$. D'où $\inf \psi(U) \geq e + f$ et donc $\inf \psi(U) \in e + V + E_+^\bullet$. Ce qui prouve l'inf-continuité de ψ en x. □

Remarque 4.5. La définition usuelle de semi-continuité inférieure pour les applications vectorielles est la suivante ([Th1], [Th2], [PT], [BT], [BPT]) : une application $\psi\colon X \longrightarrow E^\bullet$ est dite *semi-continue inférieurement* en $x \in X$ si pour tout voisinage V de 0 dans E et pour tout $e \in E$ tel que $e \leq \psi(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $\psi(U) \subset e + V + E_+^\bullet$ ou de façon équivalente si la multiapplication $\Gamma\colon X \rightrightarrows E$ définie pour tout $x \in X$ par $\Gamma(x) = \{e \in E : e \leq \psi(x)\}$ est semi-continue inférieurement en x ; si $\psi(x) \in E$, cela est encore équivalent à : pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe un voisinage U de x tel que $\psi(U) \subset \psi(x) + V + E_+^\bullet$. Cette notion est plus faible que l'inf-continuité considérée ici et que la continuité classique, alors que l'inf-continuité n'est en général pas comparable avec la continuité. Toutefois, si E_+ est d'intérieur non vide la semi-continuité inférieure et l'inf-continuité coïncident :

Proposition 4.6. *Soit $\psi\colon X \longrightarrow E^\bullet$ une application et $x \in X$.*

a) *Si ψ est inf-continue en x, alors elle est semi-continue inférieurement en x.*

b) *Réciproquement, si E_+ est d'intérieur non vide et si ψ est semi-continue inférieurement en x, alors ψ est inf-continue en x.*

Preuve. Le a) est immédiat. Montrons b) : soit V un voisinage de 0 et $e \in E$ tel que $e \leq \psi(x)$. Comme l'intérieur de E_+ est non vide, il existe $f \in \operatorname{int} E_+ \cap (-V)$. Ainsi, $E_+ - f$ est un voisinage de 0. D'après la semi-continuité inférieure de ψ en x, il existe un voisinage U de x tel que $\psi(U) \subset e + (E_+ - f) + E_+^\bullet$. On a donc

$$\forall y \in U \ , \quad \psi(y) \geq e - f \ ,$$

et donc $\inf \psi(U) \geq e - f$. Comme $-f \in V$, on obtient $\inf \psi(U) \in e + V + E_+^\bullet$. $\square$

On donne dans les deux propositions suivantes quelques résultats que l'on utilisera plus loin.

Proposition 4.7.

a) *Soit $\psi\colon X \longrightarrow E$ une application ordre-lipschitzienne*[8] *sur X :*

$$\exists L \in \mathbb{R}_+^*, \exists h \in E_+^1, \forall (x,y) \in X \times X \ , \quad |\psi(x) - \psi(y)| \leq L d(x,y) h \ ,$$

alors ψ est inf-continue sur X.

b) *Soit $(\psi_i)_{i\in I}$ une famille finie d'applications de X dans $E^\bullet$ inf-continues en $x \in X$. Alors $\psi = \sup_{i\in I} \psi_i$ est inf-continue en x.*

c) *Soit $(\psi_n)_n$ une suite croissante d'applications de X dans $E^\bullet$ inf-continues en x et $\psi = \sup_n \psi_n$. On suppose que si $x \in \operatorname{dom}(\psi)$ alors $(\psi_n(x))_n$ converge en norme vers $\psi(x)$ et que si $x \in \overline{\operatorname{dom}}(\psi)$ alors $\psi(x) = \operatorname{tsup}_n \psi_n(x)$. Alors ψ est inf-continue en x.*

d) *Supposons que E possède une norme ordre continue. Soit $(\psi_n)_n$ une suite d'applications de X dans $E^\bullet$ inf-continues en $x \in X$ telle que $\psi(x) = \operatorname{tsup}_n \psi_n(x)$. Alors ψ est inf-continue en x.*

e) *Soit $\psi\colon X \longrightarrow E^\bullet$ une application inf-continue en $x \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Alors l'application $\alpha\psi$ est inf-continue en x.*

f) *Soit $\psi_1, \psi_2\colon X \longrightarrow E^\bullet$ deux applications inf-continues en $x \in X$. Alors l'application $(\psi_1 + \psi_2)$ est inf-continue en x.*

Preuve. a) Soit $x \in X$, V un voisinage de 0 dans E et $e \in E$ tel que $e \leq \psi(x)$. On a

$$\forall y \in X \ , \quad \psi(y) \geq \psi(x) - L d(x,y) h \geq e - L d(x,y) h \ .$$

Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(0,r) \subset V$. Soit alors $U = B(x, \frac{r}{2L})$. On a

$$\inf \psi(U) \geq \inf_{y\in U} \{e - L d(x,y) h\} = e - \tfrac{r}{2} h \ .$$

[8] Il existe plusieurs notions de condition de Lipschitz pour les applications vectorielles. Celle donnée ici, est adaptée à notre problème. On renvoie à [St, Remark 2.2] pour une exposition des autres définitions.

D'où $\inf\psi(U) \in e + V + E_+^\bullet$.

b) Il suffit de montrer le résultat pour $I = \{1,2\}$. Soit V un voisinage de 0 dans E, W un voisinage de 0 tel que $W + W \subset V$ et $e \in E$ tel que $e \leq \psi(x)$. Pour $i \in I$, posons $e_i = \inf\{e, \psi_i(x)\}$. Il existe alors un voisinage U de x tel que pour $i \in I$, on ait $\inf\psi_i(U) \in e_i + W + E_+^\bullet$. Il existe donc $w_i \in W \cap E_+$ tel que $\inf\psi_i(U) \geq e_i - w_i$. On a alors pour $i \in I$,

$$\begin{aligned}\inf\psi(U) &\geq \inf\psi_i(U) \geq e_i - w_i \geq e_i - w_1 - w_2 \\ &\geq \sup\{e_1, e_2\} - w_1 - w_2 \\ &\geq e - w_1 - w_2\ .\end{aligned}$$

D'où $\inf\psi(U) \in e + V + E_+^\bullet$.

c) Supposons d'abord que $x \in \mathrm{dom}(\psi)$. Soit V un voisinage de 0 dans E et $e \in E$ tel que $e \leq \psi(x)$. Soit W un voisinage de 0 tel que $W + W \subset V$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\psi_{n_0}(x) \in \psi(x) + W$. D'autre part, il existe un voisinage U de x tel que $\inf\psi_{n_0}(U) \in \psi_{n_0}(x) + W + E_+^\bullet$. Comme $\inf\psi(U) \geq \inf\psi_{n_0}(U)$, on obtient $\inf\psi(U) \in \psi(x) + W + W + E_+^\bullet \subset e + V + E_+^\bullet$. Ce qui prouve que ψ est inf-continue en x.

Supposons à présent que $x \in \overline{\mathrm{dom}}(\psi) \setminus \mathrm{dom}(\psi)$. Soit V un voisinage de 0 dans E, W un voisinage de 0 tel que $W + W \subset V$ et $e \in E$. Comme $\psi(x) = \mathrm{tsup}_n\,\psi_n(x) = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\psi_{n_0}(x) \in e + W + E_+^\bullet$ et donc $\psi_{n_0}(x) \geq e + f$ pour un $f \in W$. Il existe aussi un voisinage U de x tel que $\inf\psi_{n_0}(U) \in (e + f) + W + E_+^\bullet$. On a alors $\inf\psi(U) \geq \inf\psi_{n_0}(U) \in e + W + W + E_+^\bullet \subset e + V + E_+^\bullet$. Et donc ψ est inf-continue en x.

Finalement, si $x \notin \overline{\mathrm{dom}}(\psi)$, il existe un voisinage U de x tel que $U \cap \overline{\mathrm{dom}}(\psi) = \emptyset$. On a donc pour tout $e \in E$ et tout voisinage V de 0 dans E, $+\infty = \inf\psi(U) \in e + V + E_+^\bullet$.

d) En remplaçant chaque ψ_n par $\sup\{\psi_i : i \leq n\}$, grâce au b), on peut supposer que la suite $(\psi_n)_n$ est croissante. Si $x \in \mathrm{dom}(\psi)$, d'après le lemme 3.4, la suite $(\psi_n(x))_n$ converge vers $\psi(x)$. Si $x \in \overline{\mathrm{dom}}(\psi) \setminus \mathrm{dom}(\psi)$, on a $\psi(x) = \mathrm{tsup}_n\,\psi_n(x) = +\infty$. Il suffit alors d'appliquer le c).

e) On peut supposer que α est strictement positif. Soit V un voisinage de 0 dans E et $e \in E$ tel que $e \leq (\alpha\psi)(x)$. D'après l'inf-continuité de ψ en x, il existe un voisinage U de x dans X tel que $\inf\psi(U) \in \frac{1}{\alpha}e + \frac{1}{\alpha}V + E_+^\bullet$. D'où $\inf(\alpha\psi)(U) = \alpha\inf\psi(U) \in e + V + E_+^\bullet$. Ce qui prouve l'inf-continuité de $\alpha\psi$ en x.

f) Soit V un voisinage de 0 dans E, $e \in E$ tel que $e \leq (\psi_1 + \psi_2)(x)$. Il existe un voisinage W de 0 tel que $W + W \subset V$ et $e_i \in E$ tel que $e_i \leq \psi_i(x)$ pour $i \in \{1,2\}$ et $e_1 + e_2 = e$. D'après l'inf-continuité de ψ_i en x, il existe un voisinage U de x tel que

$$\inf\psi_i(U) \in e_i + W + E_+^\bullet\ , \quad \forall i \in \{1,2\}\ .$$

Comme $\inf(\psi_1 + \psi_2)(U) \geq \inf\psi_1(U) + \inf\psi_2(U)$, on obtient $\inf(\psi_1 + \psi_2)(U) \in e_1 + e_2 + W + W + E_+^\bullet \subset e + V + E_+^\bullet$. $\square$

Proposition 4.8. *Soit $\psi\colon X \longrightarrow E^\bullet$ une application inf-continue en $x \in X$ et $(x_n)_n$ une suite dans X qui converge vers $x \in X$. Alors on a $\psi(x) \leq \underline{\lim}_n \psi(x_n)$.*

Preuve. On peut supposer que $\underline{\lim}_n \psi(x_n) < +\infty$. Soit $e \in E$ tel que $e \leq \psi(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un voisinage U_k de x tel que $\inf \psi(U_k) \in e + B(0, 1/k) + E_+^\bullet$. D'autre part, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_k$, $x_p \in U_k$. On pourra supposer que la suite $(n_k)_k$ ainsi construite est croissante. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\underline{\lim}_n \psi(x_n) = \sup_k \inf_{p \geq n_k} \psi(x_p) \geq \inf_{p \geq n_k} \psi(x_p) \geq \inf \psi(U_k) \in e + B(0, 1/k) + E_+^\bullet .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe donc un $e_k \in B(0, 1/k)$ tel que

$$\underline{\lim}_n \psi(x_n) \geq e + e_k .$$

En particulier, $\underline{\lim}_n \psi(x_n) \in E$. Comme la suite $(e_k)_k$ converge vers 0 et comme le cône E_+ est fermé, en passant à la limite on trouve $\underline{\lim}_n \psi(x_n) \geq e$. Finalement, comme ceci est vrai pour tout $e \in E$ tel que $e \leq \psi(x)$, on trouve $\underline{\lim}_n \psi(x_n) \geq \psi(x)$. $\square$

On donne aussi un lemme fondamental pour la suite.

Lemme 4.9. *Soit $\psi\colon X \longrightarrow E^\bullet$ une application inf-continue en $x \in X$. Alors on a $\psi(x) = \operatorname{tsup}_{r\downarrow 0} \inf \psi(B(x, r))$. De plus, si $\psi(x) \in E$, on a $\psi(x) = \lim_{r\downarrow 0} \inf \psi(B(x, r))$.*

Preuve. Remarquons d'abord que l'application $r \longmapsto \inf \psi(B(x, r))$ est décroissante. Supposons que $\psi(x) \in E$ et soit V un voisinage de 0 dans E. D'après la proposition 4.3, il existe un réel $r_0 > 0$ tel que

$$\forall r \in \mathbb{R},\ 0 < r < r_0\ , \quad \inf \psi(B(x, r)) \in \psi(x) + V\ .$$

D'où $\psi(x) = \lim_{r\downarrow 0} \inf \psi(B(x, r))$.

Supposons à présent que $\psi(x) = +\infty$. Soit V un voisinage de 0 dans E et $e \in E$. Comme ψ est inf-continue en x, il existe un réel $r > 0$ tel que $\inf \psi(B(x, r)) \in e + V + E_+^\bullet$. D'où $\psi(x) = \operatorname{tsup}_{r\downarrow 0} \inf \psi(B(x, r))$. $\square$

Finalement, on donne deux résultats simples basés sur la notion d'épigraphe.

Définition 4.10. Soit $\psi\colon X \longrightarrow E^\bullet$ une application. L'épigraphe de ψ noté $\operatorname{Epi} \psi$ est le sous-ensemble de $X \times E$ défini par

$$\operatorname{Epi} \psi = \{(x, e) \in X \times E : \psi(x) \leq e\}\ .$$

Proposition 4.11. *Soit $\psi\colon X \longrightarrow E^\bullet$ une application inf-continue sur X. Alors son épigraphe* Epi ψ *est fermé dans $X \times E$.*

Preuve. On sait que toute fonction semi-continue inférieurement a un épigraphe fermé ([BPT, Proposition 1.4]). En particulier, grâce à la proposition 4.6, toute application inf-continue a un épigraphe fermé. □

Remarque 4.12. En général, il n'y a pas d'équivalence entre la semi-continuité inférieure d'une application vectorielle et le fait que son épigraphe soit fermé – voir [BPT], [PT].

Proposition 4.13. ([AW2, Lemma 2.5]) *On suppose que X et E sont séparables. Soit $\psi, \phi\colon X \longrightarrow E^\bullet$ deux applications. On suppose que ψ est inf-continue sur X. Alors il existe un sous-ensemble dénombrable D dense dans X* (qui ne dépend que de ϕ) *tel que si $\psi \le \phi$ sur D alors $\psi \le \phi$ sur X.*

Preuve. Ce résultat a été démontré par H. Attouch et R. Wets dans [AW2] pour les applications à valeurs réelles. La preuve dans le cas vectoriel est identique. On la reproduit ici par commodité pour le lecteur : comme $X \times E$ est séparable, il existe un ensemble dénombrable $D^\uparrow$ dense dans Epi ϕ. Soit D la projection de $D^\uparrow$ sur X. Il est clair que $\psi \le \phi$ sur D équivaut à $\{(x,e) \in X \times E : \phi(x) \le e,\ x \in D\} \subset \operatorname{Epi}\psi$. On a alors

$$\operatorname{Epi}\phi \subset \overline{\{(x,e) \in X \times E : \phi(x) \le e,\ x \in D\}} \subset \overline{\operatorname{Epi}\psi} = \operatorname{Epi}\psi\ .$$

La première inclusion est triviale : soit $(x,e) \in \operatorname{Epi}\psi$; comme $D^\uparrow$ est dense dans Epi ϕ, il existe une suite $(x_n, e_n)_n$ dans $D^\uparrow$ qui converge vers (x,e). Le seconde inclusion est immédiate et la dernière égalité provient de la proposition 4.11. □

5. Résultat d'approximation.

Dans cette partie, on donne une version vectorielle de l'approximation lipschitzienne pour les applications inf-continues (Corollaire 5.3). En vue d'applications à la convergence des fonctions vectorielles (voir 6$^{\text{ème}}$ partie), on donnera d'abord le résultat sous une forme assez générale.

Théorème 5.1. *Soit $\{\psi, \psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ des applications inf-continues propres de X dans $E^\bullet$. On suppose que*

(i) *il existe $a, b \in E_+$ et $x_0 \in X$ tels que*

$$-a - d(x,x_0)b \le \psi_n(x) \le \psi(x)\ , \qquad \forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;$$

(ii) *pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\operatorname{dom}(\psi) = \operatorname{dom}(\psi_n)$ *et* $\operatorname{dom}(\psi)$ *est séparable.*

Alors il existe $h \in E^1_+$ *et* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tels que les applications* $\psi^k_n \colon X \longrightarrow E$ *définies pour tout* $k \geq k_0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$ *par*

$$\psi^k_n(x) = \inf_{y \in X} \{\psi_n(y) + kd(x,y)h\} \ , \qquad \forall x \in X \ ,$$

vérifient les propriétés suivantes :

(1) $|\psi^k_n(x) - \psi^k_n(y)| \leq kd(x,y)h, \quad \forall (x,y) \in X \times X$;

(2) $\|\psi^k_n(x) - \psi^k_n(y)\| \leq kd(x,y), \quad \forall (x,y) \in X \times X$;

(3) $-a - d(x,x_0)b \leq \psi^k_n(x) \leq \psi^{k+1}_n(x) \leq \psi_n(x), \quad \forall x \in X$;

(4) $\psi_n(x) = \sup_k \psi^k_n(x), \quad \forall x \in X$;

(5) $\psi_n(x) = \lim_k \psi^k_n(x), \quad \forall x \in \mathrm{dom}(\psi_n)$;

(6) $\psi_n(x) = \mathrm{tsup}_k \psi^k_n(x), \quad \forall x \in \overline{\mathrm{dom}}(\psi_n)$.

De plus pour tout $x \in \overline{\mathrm{dom}}(\psi)$ *et tout* $r > 0$*, il existe* $k_r(x) \geq k_0$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_r(x) \ , \quad \psi^k_n(x) \geq \inf \psi_n \left(B(x,r)\right) \ .$$

Remarques 5.2. 1. La dernière partie du théorème 5.1 assure que sur l'adhérence du domaine de ψ, la convergence des fonctions ψ^k_n vers ψ_n est “uniforme” en n. Cette propriété nous sera utile dans la section 6.

2. L'idée de la preuve (pour une seule fonction ψ) est la suivante : supposons qu'il existe $h \in E^1_+$ tel que pour tout $x \in \overline{\mathrm{dom}}(\psi)$, il existe $\alpha_x \in \mathbb{R}_+$ avec

$$0 \leq \psi(x) \leq \alpha_x h \ . \tag{†}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\psi^k(x) &= \inf\{\psi(y) + k\,d(x,y)h : y \in \mathrm{dom}(\psi)\} \\ &= \inf\{\psi(y) + k\,d(x,y)h : y \in B(x,\alpha_x/k)\} \\ &\geq \inf \psi \left(B(x,\alpha_x/k)\right) \ .\end{aligned}$$

Grâce au lemme 4.9, on trouve alors

$$\sup_k \psi^k(x) = \sup_k \inf \psi \left(B(x,\alpha_x/k)\right) = \psi(x) \ .$$

Ce qui donne le résultat. L'idée est donc d'approcher un ψ quelconque par une suite d'applications $(e_q)_q$ vérifiant (†).

Preuve. On note $Y = \overline{\mathrm{dom}}(\psi) (= \overline{\mathrm{dom}}(\psi_n))$ l'adhérence du domaine de ψ. Soit $(x_m)_m$ une suite dense dans $\mathrm{dom}(\psi)$ et $h \in E^1_+$ défini par

$$h = \frac{1}{3}\left[\frac{a}{\|a\|+1} + \frac{b}{\|b\|+1} + \sum_m 2^{-m}\,\frac{|\psi(x_m)|}{\|\psi(x_m)\|+1}\right] \ .$$

Comme ψ_n est propre, il est clair que

$$\psi_n^k(x) = \inf_{y \in \mathrm{dom}(\psi_n)} \{\psi_n(y) + kd(x,y)h\} < +\infty \;, \qquad \forall x \in X,\, \forall k \in \mathbb{N} \;.$$

Soit k_0 la partie entière de $6(\|b\|+1)+1$. Pour $k \geq k_0$ et $y \in \mathrm{dom}(\psi_n)$, on a

$$\begin{aligned}
\psi_n(y) + kd(x,y)h &\geq -a - d(y,x_0)b + kd(x,y)h \\
&\geq -a - d(x,x_0)b - d(y,x)b + kd(x,y)h \\
&\geq -a - d(x,x_0)b - d(y,x)\,[3(\|b\|+1)h] + kd(x,y)h \\
&\geq -a - d(x,x_0)b + [k - 3(\|b\|+1)]\, d(x,y)h \\
&\geq -a - d(x,x_0)b \;.
\end{aligned}$$

En prenant l'inf pour $y \in \mathrm{dom}(\psi_n)$, on en déduit que $\psi_n^k(x) \geq -a - d(x,x_0)b$ et donc que $\psi_n^k(x) \in E$.

Montrons (1) : soit $k \geq k_0$, $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in X$. Pour tout $z \in \mathrm{dom}(\psi_n)$, on a

$$\psi_n(z) + kd(x,z)h \leq \psi_n(z) + kd(y,z)h + kd(x,y)h \;,$$

et en prenant la borne inférieure pour $z \in \mathrm{dom}(\psi_n)$, on trouve

$$\psi_n^k(x) \leq \psi_n^k(y) + kd(x,y)h \;.$$

C'est à dire

$$\psi_n^k(x) - \psi_n^k(y) \leq kd(x,y)h \;.$$

De la même façon, on obtient

$$\psi_n^k(y) - \psi_n^k(x) \leq kd(x,y)h \;.$$

D'où

$$|\psi_n^k(x) - \psi_n^k(y)| \leq kd(x,y)h \;.$$

Le (2) provient du (1) et de la propriété $(*)$. Le (3) est clair. Montrons à présent (4) à (6). D'après la construction de h, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_m \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\psi(x_m) + a + d(x_0,x_m)b \leq \alpha_m h \;.$$

Soit $x \in Y$ et $(e_{n,q}(x))_{n,q} = \big(\inf \psi_n(B(x,1/q))\big)_{n,q}$. Il est clair que pour tout $(n,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $e_{n,q}(x) \in E$ et que

$$e_{n,q}(x) \geq -a - \left[d(x,x_0) + \frac{1}{q}\right] b \;. \tag{5.1.1}$$

De plus, comme $x \in \overline{\text{dom}}(\psi)$, il existe une sous-suite $(x_{m_p})_p$ de $(x_m)_m$ qui converge vers x. Fixons $q \in \mathbb{N}$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ assez grand tel que $x_{m_p} \in B(x, 1/q)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq e_{n,q}(x) + a + \left[d(x,x_0) + \frac{1}{q}\right] b &= \inf \psi_n(B(x,1/q)) + a + \left[d(x,x_0) + \frac{1}{q}\right] b \\ &\leq \psi_n(x_{m_p}) + a + d(x_0, x_{m_p})b + \frac{2}{q}b \\ &\leq \psi(x_{m_p}) + a + d(x_0, x_{m_p})b + \frac{2}{q}b \\ &\leq \left[\alpha_{m_p} + \frac{6}{q}(\|b\| + 1)\right] h \ . \end{aligned}$$

On pose $\alpha_q(x) = \left[\alpha_{m_p} + \frac{6}{q}(\|b\| + 1)\right]$.

On a donc construit un élément h de E^1_+, une suite $(e_{n,q})_{n,q}$ d'applications de Y dans E et une suite de fonctions $(\alpha_q)_q$ de Y dans $\mathbb{R}^+$ tels que pour tout $x \in Y$ et $(n,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} e_{n,q}(x) = \inf \psi_n(B(x,1/q)) \leq \psi_n(x) \ , \\ 0 \leq e_{n,q}(x) + a + \left[d(x,x_0) + \frac{1}{q}\right] b \leq \alpha_q(x) h \ . \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Fixons $(n,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et posons pour tout $k \geq k_0$ et tout $x \in Y$,

$$\phi^k_{n,q}(x) = \inf_{y \in Y} \{e_{n,q}(y) + kd(x,y)h\} \ .$$

On a

$$\phi^k_{n,q}(x) \leq \psi^k_n(x) \ , \tag{5.1.3}$$

$$\phi^k_{n,q}(x) \leq e_{n,q}(x) \ . \tag{5.1.4}$$

Fixons $k \geq k_0$ et $x \in Y$. Soit $y \in Y \setminus B(x, 2\alpha_q(x)/k)$. On a d'après (5.1.1) et (5.1.2),

$$\begin{aligned} e_{n,q}(y) + kd(x,y)h &= e_{n,q}(y) + \frac{k}{2}d(x,y)h + \frac{k}{2}d(x,y)h \\ &\geq e_{n,q}(y) + \alpha_q(x)h + \frac{k}{2}d(x,y)h \\ &\geq -a - \left[d(y,x_0) + \frac{1}{q}\right] b + e_{n,q}(x) + a \\ &\qquad\qquad + \left[d(x,x_0) + \frac{1}{q}\right] b + \frac{k}{2}d(x,y)h \\ &\geq e_{n,q}(x) + [-d(y,x_0) + d(x,x_0)]\, b + \frac{k}{2}d(x,y)h \\ &\geq e_{n,q}(x) - d(x,y)b + \frac{k}{2}d(x,y)h \\ &\geq e_{n,q}(x) + \left[\frac{k}{2} - 3(\|b\| + 1)\right] d(x,y)h \\ &\geq e_{n,q}(x) \ . \end{aligned}$$

On déduit alors de (5.1.4),

$$\phi_{n,q}^k(x) = \inf\{e_{n,q}(y) + kd(x,y)h : y \in B(x, 2\alpha_q(x)/k) \cap Y\} \ ,$$

et donc

$$\begin{aligned}\phi_{n,q}^k(x) &\geq \inf\{e_{n,q}(y) : y \in B(x, 2\alpha_q(x)/k) \cap Y\} \\ &\geq \inf\{\inf \psi_n(B(y, 1/q)) : y \in B(x, 2\alpha_q(x)/k)\} \\ &\geq \inf \psi_n \left(B(x, \tfrac{1}{q} + \tfrac{2\alpha_q(x)}{k})\right) \ .\end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $x \in Y$, $(n,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $k \geq k_0$, on a grâce à (5.1.3)

$$\psi_n^k(x) \geq \inf \psi_n \left(B(x, \tfrac{1}{q} + \tfrac{2\alpha_q(x)}{k})\right) \ , \tag{5.1.5}$$

Fixons alors $x \in Y$ et soit $r > 0$. Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $1/q < r/2$. Le réel $\alpha_q(x)$ est alors déterminé. Il existe donc $k_r(x) \in \mathbb{N}$ tel que $2\alpha_q(x)/k_r(x) < r/2$. On a alors $1/q + 2\alpha_q(x)/k_r(x) < r$. D'après (5.1.5), on a pour tout $k \geq k_r(x)$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi_n^k(x) \geq \psi_n^{k_r(x)}(x) \geq \inf \psi_n \left(B(x, \tfrac{1}{q} + \tfrac{2\alpha_q(x)}{k_r(x)})\right) \geq \inf \psi_n \left(B(x,r)\right) \ . \tag{5.1.6}$$

Grâce au lemme 4.9, on trouve alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi_n(x) \geq \operatorname*{tsup}_k \psi_n^k(x) \geq \operatorname*{tsup}_{r \geq 0} \inf \psi_n \left(B(x,r)\right) = \psi_n(x) \ .$$

Soit à présent $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathrm{dom}(\psi_n)$ et $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 4.9, il existe $r > 0$ tel que

$$\|\psi_n(x) - \inf \psi_n(B(x,r))\| < \varepsilon \ .$$

D'autre part, d'après (5.1.6), il existe $k_r(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq k_r(x) \ , \qquad 0 \leq \psi_n(x) - \psi_n^k(x) \leq \psi_n(x) - \inf \psi_n \left(B(x,r)\right) \ .$$

D'où

$$\forall k \geq k_r(x) \ , \qquad \|\psi_n(x) - \psi_n^k(x)\| \leq \|\psi_n(x) - \inf \psi_n \left(B(x,r)\right)\| < \varepsilon \ .$$

Ce qui prouve que la suite $(\psi_n^k(x))_k$ converge en norme vers $\psi_n(x)$.
Finalement, si $x \notin Y$, on a $d(x,Y) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq k_0$, on trouve

$$\begin{aligned}\psi_n^k(x) &= \inf_{y \in Y} \{\psi_n(y) + kd(x,y)h\} \\ &\geq \inf_{y \in Y} \{-a - d(y,x_0)b + kd(x,y)h\} \\ &\geq \inf_{y \in Y} \{-a - d(x,x_0)b - d(y,x)b + kd(x,y)h\} \\ &\geq \inf_{y \in Y} \{-a - d(x,x_0)b - 3(\|b\|+1)d(y,x)h + kd(x,y)h\} \\ &\geq \inf_{y \in Y} \{-a - d(x,x_0)b + [k - 3(\|b\|+1)]\, d(x,y)h\} \\ &\geq -a - d(x,x_0)b + [k - 3(\|b\|+1)]\, d(x,Y)h \ . \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

En prenant alors le sup sur k, on obtient

$$+\infty = \psi_n(x) \geq \sup_k \psi_n^k(x) \geq \sup_k \{-a + [k - 3(\|b\|+1)]\, d(x,Y)h\} = +\infty \ .$$

Ce qui finit la preuve. $\square$

Corollaire 5.3. *Soit $\psi\colon X \longrightarrow E^{\bullet}$ une application inf-continue propre sur X telle que* $\mathrm{dom}(\psi)$ *soit séparable. On suppose qu'il existe $a, b \in E_+$ et $x_0 \in X$ tels que*

$$\psi(x) \geq -a - d(x, x_0)b\ , \qquad \forall x \in X\ .$$

Alors il existe $h \in E^1_+$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que les applications $\psi^k\colon X \longrightarrow E$ définies pour tout $k \geq k_0$ par

$$\psi^k(x) = \inf_{y \in X} \{\psi(y) + kd(x,y)h\}\ , \qquad \forall x \in X\ ,$$

vérifient les propriétés suivantes :

(1) $|\psi^k(x) - \psi^k(y)| \leq kd(x,y)h, \quad \forall (x,y) \in X \times X$;

(2) $\|\psi^k(x) - \psi^k(y)\| \leq kd(x,y), \quad \forall (x,y) \in X \times X$;

(3) $-a - d(x,x_0)b \leq \psi^k(x) \leq \psi^{k+1}(x) \leq \psi(x), \quad \forall x \in X$;

(4) $\psi(x) = \sup_k \psi^k(x), \quad \forall x \in X$;

(5) $\psi(x) = \lim_k \psi^k(x), \quad \forall x \in \mathrm{dom}(\psi)$;

(6) $\psi(x) = \operatorname{tsup}_k \psi^k(x), \quad \forall x \in \overline{\mathrm{dom}}(\psi)$.

Remarques 5.4. 1. Grâce à la proposition 4.7.c, si $\psi\colon X \longrightarrow E^{\bullet}$ est une application telle qu'il existe une suite $(\psi^k)_k$ d'applications vérifiant les propriétés (1) à (6) du corollaire 5.3, alors ψ est inf-continue sur X.

2. L'élément $h \in E^1_+$ (qui dépend de ψ) donné dans le théorème 5.1 et le corollaire 5.3 n'est pas unique : tout $h \in E^1_+$ vérifiant les propriétés suivantes peut être utilisé :

(i) il existe $\nu_a, \nu_b \in \mathbb{R}^+$ tels que $a \leq \nu_a h$ et $b \leq \nu_b h$;

(ii) il existe un sous-ensemble D dénombrable dense dans $\mathrm{dom}(\psi)$ tel que

$$\forall x \in D,\ \exists \alpha(x) \in \mathbb{R}^+\ , \quad \psi(x) \leq \alpha(x)h\ .$$

3. Si $(\psi_n)_n$ est une suite d'applications de X dans $E^{\bullet}_+$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ les hypothèses du corollaire 5.3, on a

$$\psi^k_n(x) = \inf_{y \in Y} \{\psi_n(y) + kd(x,y)h_n\}\ .$$

D'après la remarque précédente, on peut prendre

$$\psi^k_n(x) = \inf_{y \in Y} \{\psi_n(y) + kd(x,y)h\}\ .$$

où $h \in E^1_+$ est défini par

$$h = \sum_n 2^{-n}\, h_n\ .$$

Toutefois, la dernière assertion du théorème 5.1 n'est plus vérifiée.

6. Convergence des applications vectorielles.

Une notion naturelle de convergence des applications à valeurs vectorielles est donnée par la convergence des épigraphes au sens de Kuratowski, Mosco ... Cependant, on ne peut espérer qu'une telle définition donne de bonnes propriétés variationnelles (convergence des minimums par exemple). On est donc amené à introduire une nouvelle notion nommée V-convergence (et V*-convergence uniforme) pour les applications à valeurs dans $E^\bullet$. Ces notions coïncident avec la notion classique d'épi-convergence (voir [A], [AW1], [AW2]) lorsque $E = \mathbb{R}$. De plus la V*-convergence uniforme possède de bonnes propriétés.

Définition 6.1. Soit $\{\psi_n : n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$ des applications de X dans $E^\bullet$. On définit la *limite variationnelle inférieure* (V-$\underline{\lim}\,\psi_n$) et la *limite variationnelle supérieure* (V-$\overline{\lim}\,\psi_n$) de la suite $(\psi_n)_n$ par

$$\begin{aligned} \text{V-}\underline{\lim}\,\psi_n(x) &= \sup_{p\geq 1} \underline{\lim}_{n\to\infty} \inf \psi_n\big(B(x,1/p)\big) \ , \\ \text{V-}\overline{\lim}\,\psi_n(x) &= \sup_{p\geq 1} \overline{\lim}_{n\to\infty} \inf \psi_n\big(B(x,1/p)\big) \ . \end{aligned}$$

On dit que la suite $(\psi_n)_n$ V-*converge* vers ψ_∞ en $x \in X$ si

$$\text{V-}\underline{\lim}\,\psi_n(x) = \text{V-}\overline{\lim}\,\psi_n(x) = \psi_\infty(x) \ .$$

On note alors $\psi_\infty(x) = \text{V-}\lim \psi_n(x)$.

Remarque 6.2. On a trivialement les inégalités suivantes : V-$\underline{\lim}\,\psi_n(x) \leq$ V-$\overline{\lim}\,\psi_n(x)$ et V-$\underline{\lim}\,\psi_n(x) \leq \underline{\lim}_n \psi_n(x)$, V-$\overline{\lim}\,\psi_n(x) \leq \overline{\lim}_n \psi_n(x)$.

Proposition 6.3. *Soit $\{\psi, \psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ des applications de X dans $E^\bullet$ inf-continues propres sur X telles que*

(i) *il existe $a, b \in E_+$ et $x_0 \in X$ tels que*

$$-a - d(x,x_0)b \leq \psi_n(x) \leq \psi(x) \ , \qquad \forall x \in X, \, \forall n \in \mathbb{N} \ ;$$

(ii) *pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\mathrm{dom}(\psi_n) = \mathrm{dom}(\psi)$ *et* $\mathrm{dom}(\psi)$ *est séparable.*

Alors pour tout $x \in X$, on a

$$\text{V-}\underline{\lim}\,\psi_n(x) = \sup_k \underline{\lim}_{n\to\infty} \psi_n^k(x) \ , \tag{6.3.1}$$

$$\text{V-}\overline{\lim}\,\psi_n(x) = \sup_k \overline{\lim}_{n\to\infty} \psi_n^k(x) \ , \tag{6.3.2}$$

où ψ_n^k est l'approximation de ψ_n donnée par le théorème 5.1. De plus, si E possède une norme ordre-continue, V-$\underline{\lim}\,\psi_n$ *et* V-$\overline{\lim}\,\psi_n$ *sont des applications inf-continues sur leur domaine.*

Preuve. Montrons (6.3.1) : soit $x \in X$. Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a

$$\psi_n(x) \geq \psi_n^k(x) \ .$$

D'où

$$\text{V-}\underline{\lim}\, \psi_n(x) \geq \sup_p \underline{\lim}_{n\to\infty} \inf \psi_n^k\left(B(x,1/p)\right) \ .$$

Or pour tout $y \in B(x,1/p)$, on a

$$\psi_n^k(y) \geq \psi_n^k(x) - kd(x,y)h \geq \psi_n^k(x) - \tfrac{k}{p}h \ .$$

On en déduit que

$$\text{V-}\underline{\lim}\, \psi_n(x) \geq \sup_p \underline{\lim}_{n\to\infty} \left[\psi_n^k(x) - \tfrac{k}{p}h\right] = \underline{\lim}_{n\to\infty} \psi_n^k(x) \ .$$

Comme ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on trouve

$$\text{V-}\underline{\lim}\, \psi_n(x) \geq \sup_k \underline{\lim}_{n\to\infty} \psi_n^k(x) \ .$$

Montrons l'inégalité contraire : soit $x \in \overline{\text{dom}}(\psi)$ et $p \in \mathbb{N}$. D'après le théorème 5.1, il existe $k_p \ \big(= k_{1/p}(x)\big)$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \qquad \psi_n^{k_p}(x) \geq \inf \psi_n\left(B(x,1/p)\right) \ .$$

On obtient alors en supposant que la suite $(k_p)_p$ est croissante,

$$\sup_k \underline{\lim}_{n\to\infty} \psi_n^k(x) = \sup_p \underline{\lim}_{n\to\infty} \psi_n^{k_p}(x) \geq \sup_p \underline{\lim}_{n\to\infty} \inf \psi_n\left(B(x,1/p)\right) = \text{V-}\underline{\lim}\, \psi_n(x) \ .$$

Ce qui prouve l'inégalité contraire pour $x \in \overline{\text{dom}}(\psi)$. Supposons que $x \notin \overline{\text{dom}}(\psi)$. D'après le point (5.1.7) de la preuve du théorème 5.1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq k_0$,

$$\psi_n^k(x) \geq -a - d(x,x_0)b + \left[k - 3(\|b\|+1)\right] d(x, \overline{\text{dom}}(\psi))h \ .$$

D'où

$$\sup_k \underline{\lim}_n \psi_n^k(x) = +\infty \geq \text{V-}\underline{\lim}\, \psi_n(x) \ .$$

Ce qui prouve l'inégalité contraire pour tout $x \in X$ et finit de montrer (6.3.1). La preuve de (6.3.2) est similaire.
Pour finir, remarquons que les applications $\underline{\lim}_n \psi_n^k$ et $\overline{\lim}_n \psi_n^k$ sont ordre-lipschitziennes sur X et donc, d'après la proposition 4.7, V-$\underline{\lim}\, \psi_n$ et V-$\overline{\lim}\, \psi_n$ sont inf-continues sur leur domaine. $\square$

Lorsque E_+ est d'intérieur non vide, avec un hypothèse supplémentaire sur la suite $(\psi_n)_n$, la V-convergence est équivalente à la convergence points par points. Ce résultat est classique pour les applications à valeurs réelles ([A, Chapter 2, §6] ou [DSW]). Pour l'énoncer, on donne la définition naturelle d'équi-inf-continuité suivante :

Définition 6.4. Une suite $(\psi_n)_n$ d'applications de X dans $E^\bullet$ est dite *équi-inf-continue* en $x \in X$ si pour tout voisinage V de 0 dans E et tout $e \in E$, il existe un voisinage U de x tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\inf \psi_n(U) \in \begin{cases} \psi_n(x) + V + E_+^\bullet, & \text{si } \psi_n(x) \in E, \\ e + V + E_+^\bullet, & \text{si } \psi_n(x) = +\infty. \end{cases}$$

En particulier, chaque ψ_n est inf-continue en x.

Proposition 6.5. *Supposons que E_+ est d'intérieur non vide. Soit $(\psi_n)_n$ une suite d'applications de X dans $E^\bullet$ équi-inf-continue en $x \in X$. Alors $(\psi_n)_n$ V-converge vers ψ_∞ en x si et seulement si $(\psi_n(x))_n$ converge pour l'ordre (et donc en norme) vers $\psi_\infty(x)$.*

Preuve. Il suffit de montrer que

$$\text{V-}\underline{\lim}\, \psi_n(x) = \underline{\lim}_n\, \psi_n(x) \ , \tag{6.5.1}$$

$$\text{V-}\overline{\lim}\, \psi_n(x) = \overline{\lim}_n\, \psi_n(x) \ . \tag{6.5.2}$$

On sait que $\text{V-}\underline{\lim}\, \psi_n(x) \le \underline{\lim}_n \psi_n(x)$. Montrons l'inégalité contraire : soit $\mathbb{M}$ le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par $\mathbb{M} = \{n \in \mathbb{N} : \psi_n(x) \in E\}$. Soit $e_0 \in \operatorname{int} E_+$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons le voisinage de 0 dans E défini par $V_k = E_+ - \frac{1}{k} e_0$. Comme la suite $(\psi_n)_n$ est équi-inf-continue en x, pour tout $e \in E$ il existe $p_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\inf \psi_n(B(x, 1/p_k)) \in \begin{cases} \psi_n(x) + V_k + E_+^\bullet, & \text{si } \psi_n(x) \in E, \\ e + V_k + E_+^\bullet, & \text{si } \psi_n(x) = +\infty. \end{cases}$$

C'est à dire

$$\inf \psi_n(B(x, 1/p_k)) \ge \begin{cases} \psi_n(x) - \frac{1}{k} e_0, & \text{si } n \in \mathbb{M}, \\ e - \frac{1}{k} e_0, & \text{si } n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{M}. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_n \inf \psi_n(B(x, 1/p_k)) &\ge \inf\{e, \underline{\lim}_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{M}}} \psi_n(x)\} - \tfrac{1}{k} e_0 \\ &\ge \inf\{e, \underline{\lim}_n\, \psi_n(x)\} - \tfrac{1}{k} e_0 \ . \end{aligned}$$

En prenant le supremum pour $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\text{V-}\underline{\lim}\, \psi_n(x) = \sup_k \underline{\lim}_n \inf \psi_n(B(x, 1/p_k)) \ge \inf\{e, \underline{\lim}_n\, \psi_n(x)\} \ .$$

Si $\underline{\lim}_n \psi_n(x) \in E$, on obtient le résultat en prenant $e = \underline{\lim}_n \psi_n(x)$. Sinon, comme $\underline{\lim}_n \psi_n(x) = +\infty$, on a

$$\text{V-}\underline{\lim}\, \psi_n(x) \ge \inf\{e, \underline{\lim}_n\, \psi_n(x)\} = e \ .$$

Comme e est quelconque dans E, on trouve V-$\underline{\lim}\,\psi_n(x) = +\infty$. Ceci achève la preuve de (6.5.1). Celle de (6.5.2) est similaire. $\square$

Lorsque E_+ est d'intérieur vide la définition de V-convergence donnée plus haut n'est pas satisfaisante : si $(\psi_n)_n$ est une suite d'applications constantes $(e_n)_n \subset E_+$, la V-convergence de la suite $(\psi_n)_n$ se traduit par l'ordre convergence de la suite $(e_n)_n$; or il serait plus satisfaisant d'avoir une convergence en norme. Pour cela, on introduit une autre notion de convergence appelée V*-convergence (uniforme).

Définition 6.6. Soit $\{\psi_n : n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$ des applications de X dans $E^\bullet$.

La suite $(\psi_n)_n$ V**-converge* vers ψ_∞ en $x \in X$ si toute sous-suite de $(\psi_n)_n$ possède une suite extraite qui V-converge vers ψ_∞ en x. On note $\psi_\infty(x) = $ V*-$\lim \psi_n(x)$.

La suite $(\psi_n)_n$ V**-converge uniformément* vers ψ_∞ sur X si de toute sous-suite de $(\psi_n)_n$, on peut extraire une sous-suite qui V-converge vers ψ_∞ sur X. On note $\psi_\infty = $ V$^*_{\mathrm{u}}$-$\lim \psi_n$.

Remarque 6.7. D'après la définition de la V*-convergence, la suite $(\psi_n)_n$ V*-converge vers ψ_∞ sur X si pour tout $x \in X$, toute sous-suite de $(\psi_n)_n$ admet une suite extraite (*qui dépend de* x) qui V-converge vers ψ_∞ en x. Ceci justifie la définition de la V*-convergence uniforme.

On donne à présent quelques propriétés de la V*-convergence. Ces résultats sont classiques pour l'épi-convergence des applications à valeurs réelles (voir le livre de Attouch [A, Chapter 2, §2]).

On rappelle que pour toute suite $(C_n)_n$ de sous-ensembles d'un espace métrique S, la *limite supérieure* (au sens de Kuratowski-Painlevé) de la suite $(C_n)_n$ est définie par

$$\mathrm{Ls}(C_n) = \{x \in S \, : \exists (n_k)_k, \, \exists (x_k)_k, \, x = \lim_k x_k, \, x_k \in C_{n_k}\} \ .$$

Soit ψ une application de X dans $E^\bullet$. On note $\inf \psi = \inf\{\psi(x) : x \in X\}$, $\mathrm{Argmin}\, \psi = \{x \in X : \psi(x) = \inf \psi\}$ et pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, ε-$\mathrm{Argmin}\, \psi = \{x \in X : \|\psi(x) - \inf \psi\| \leq \varepsilon\}$. Remarquons que ε-$\mathrm{Argmin}\, \psi$ peut être vide.

Proposition 6.8. *Soit $(\psi_n)_n$ une suite d'applications de X dans $E^\bullet$ qui* V**-converge vers ψ_∞ sur X. Alors on a* $\mathrm{Ls}(\mathrm{Epi}\, \psi_n) \subset \mathrm{Epi}\, \psi_\infty$.

Preuve. Soit $(x, e) \in \mathrm{Ls}(\mathrm{Epi}\, \psi_n)$ supposé non vide. Il existe donc une sous-suite $(\psi_{n_k})_k$ de $(\psi_n)_n$ et une suite $(x_k, e_k)_k$ qui converge vers (x, e) et telles que $\psi_{n_k}(x_k) \leq e_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que le suite $(\psi_{n_k})_k$ V-converge vers ψ_∞ en x et que $(e_k)_k$ converge pour l'ordre vers e. Fixons $p \in \mathbb{N}$. Pour k assez grand, $x_k \in B(x, 1/p)$. On a donc

$$\inf \psi_{n_k}(B(x, 1/p)) \leq \psi_{n_k}(x_k) \leq e_k \ .$$

D'où

$$\underline{\lim}_k \inf \psi_{n_k}(B(x,1/p)) \leq \underline{\lim}_k \psi_{n_k}(x_k) \leq \underline{\lim}_k e_k = e\ .$$

En prenant la borne supérieure pour $p \in \mathbb{N}$, on trouve

$$\psi_\infty(x) = \text{V-}\underline{\lim}\, \psi_{n_k}(x) = \sup_p \underline{\lim}_k \inf \psi_{n_k}(B(x,1/p)) \leq e\ .$$

On a donc $(x,e) \in \operatorname{Epi} \psi_\infty$. □

Remarques 6.9. 1. En fait, pour toute suite $(\psi_n)_n$, on a $\operatorname{Ls}(\operatorname{Epi}\psi_n) \subset \operatorname{Epi}(\text{V-}\underline{\lim}\,\psi_n)$.

2. Je ne pense pas que l'on ait l'inclusion (vrai pour les applications à valeurs réelles) $\operatorname{Epi}(\text{V-}\overline{\lim}\,\psi_n) \subset \operatorname{Li}(\operatorname{Epi}\psi_n)$.

Lemme 6.10. *Soit $(\psi_n)_n$ une suite d'applications de X dans $E^\bullet$ qui V^*-converge vers ψ_∞ en $x \in X$ et $(x_n)_n$ une suite dans X qui converge vers x. Alors de toute sous-suite $(\psi_{n_k})_k$, on peut extraire une sous-suite $(\psi_{n_{k_l}})_l$ telle que*

$$\psi_\infty(x) \leq \underline{\lim}_l \psi_{n_{k_l}}(x_{n_{k_l}})\ .$$

Preuve. Soit $(\psi_{n_k})_k$ une sous-suite de $(\psi_n)_n$. Il existe une suite extraite $(\psi_{n_{k_l}})_l$ qui V-converge vers ψ_∞ en x. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour l assez grand, $x_{n_{k_l}} \in B(x,1/p)$. On a donc

$$\inf \psi_{n_{k_l}}(B(x,1/p)) \leq \psi_{n_{k_l}}(x_{n_{k_l}})\ .$$

D'où

$$\underline{\lim}_l \inf \psi_{n_{k_l}}(B(x,1/p)) \leq \underline{\lim}_l \psi_{n_{k_l}}(x_{n_{k_l}})\ .$$

En prenant la borne supérieure pour $p \in \mathbb{N}$, on trouve

$$\psi_\infty(x) = \sup_p \underline{\lim}_l \inf \psi_{n_{k_l}}(B(x,1/p)) \leq \underline{\lim}_l \psi_{n_{k_l}}(x_{n_{k_l}})\ .$$

Ce qui prouve le résultat. □

Proposition 6.11. *Soit $(\psi_n)_n$ une suite d'applications de X dans $E^\bullet$ qui V^*-converge uniformément sur X vers ψ_∞. Alors de toute sous-suite $(\psi_{n_k})_k$ on peut extraire une sous-suite $(\psi_{n_{k_l}})_l$ telle que*

$$\inf \psi_\infty \geq \overline{\lim}_l \left[\inf \psi_{n_{k_l}}\right]\ .$$

Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}_+$ qui tend vers 0. Si $\operatorname{Ls}(\varepsilon_n\text{-Argmin}\,\psi_n)$ est non vide, on a

$$\operatorname{Ls}(\varepsilon_n\text{-Argmin}\,\psi_n) \subset \operatorname{Argmin}(\psi_\infty)\ ,$$

et il existe une sous-suite $(\psi_{n_k})_k$ de $(\psi_n)_n$ telle que

$$\inf \psi_\infty = \overline{\lim}_k \left[\inf \psi_{n_k}\right]\ .$$

Preuve. Soit $(\psi_{n_k})_k$ une sous-suite de $(\psi_n)_n$. Il existe une suite extraite $\left(\psi_{n_{k_l}}\right)_l$ qui V-converge vers ψ_∞ sur X. Pour tout $x \in X$ et tout $(l,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a

$$\inf \psi_{n_{k_l}} \leq \inf \psi_{n_{k_l}}(B(x, 1/p)) \ .$$

On en déduit que pour tout $x \in X$,

$$\overline{\lim_{l}} \left[\inf \psi_{n_{k_l}}\right] \leq \sup_{p} \overline{\lim_{l}} \inf \psi_{n_{k_l}}(B(x, 1/p)) = \psi_\infty(x) \ .$$

D'où $\overline{\lim\limits_{l}} \left[\inf \psi_{n_{k_l}}\right] \leq \inf \psi_\infty$.

Soit à présent $(\varepsilon_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}_+$ qui tend vers 0. Soit $x \in \mathrm{Ls}(\varepsilon_n\text{-}\mathrm{Argmin}\, \psi_n)$. Il existe donc une sous-suite $(\psi_{n_k})_k$ de $(\psi_n)_n$ et une suite $(x_k)_k$ convergeant vers x telle que $x_k \in \varepsilon_{n_k}\text{-}\mathrm{Argmin}\, \psi_{n_k}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe donc $h_k \in E_+$ avec $\|h_k\| \leq \varepsilon_{n_k}$ tel que $\psi_{n_k}(x_k) \leq \inf \psi_{n_k} + h_k$. D'après le lemme 6.10 et ce qui précède, on peut extraire une sous-suite $\left(\psi_{n_{k_l}}\right)_l$ telle que

$$\psi_\infty(x) \leq \underline{\lim_{l}} \psi_{n_{k_l}}(x_{k_l}) \quad \text{et} \quad \inf \psi_\infty \geq \overline{\lim_{l}} \left[\inf \psi_{n_{k_l}}\right] \ .$$

De plus, grâce à la proposition 3.7, on peut supposer que $(h_{k_l})_l$ converge pour l'ordre vers 0. On trouve alors

$$\begin{aligned} \inf \psi_\infty \leq \psi_\infty(x) &\leq \underline{\lim_{l}} \psi_{n_{k_l}}(x_{k_l}) \leq \overline{\lim_{l}} \psi_{n_{k_l}}(x_{k_l}) \\ &\leq \overline{\lim_{l}} \left[\inf \psi_{n_{k_l}} + h_{k_l}\right] \\ &\leq \overline{\lim_{l}} \left[\inf \psi_{n_{k_l}}\right] + \overline{\lim_{l}} h_{k_l} \\ &\leq \inf \psi_\infty \ . \end{aligned}$$

On en déduit que $x \in \mathrm{Argmin}\, \psi_\infty$ et $\overline{\lim\limits_{l}} \left[\inf \psi_{n_{k_l}}\right] = \inf \psi_\infty$. $\square$

Proposition 6.12. *Soit $(\psi_n)_n$ une suite d'applications de X dans $E^\bullet$ qui* V**-converge uniformément sur X vers ψ_∞ et $(\varepsilon_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}_+$ qui tend vers 0. Alors s'il existe une suite $(x_n)_n$ relativement compacte dans X telle que $x_n \in \varepsilon_n\text{-}\mathrm{Argmin}\, \psi_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a* $\mathrm{Argmin}\, \psi \neq \emptyset$ *et la suite $(\inf \psi_n)_n$ $*$-converge pour l'ordre vers $\inf \psi_\infty$. Si de plus E possède une norme ordre-continue et si $\inf \psi_\infty \in E$, alors*

$$\inf \psi_\infty = \lim_{n} \left[\inf \psi_n\right] \ .$$

Preuve. Soit $\left(\psi_{\tau_1(n)}\right)_n$ une sous-suite de $(\psi_n)_n$. Par la proposition 6.11, on sait qu'il existe une suite extraite $\left(\psi_{\tau_2(n)}\right)_n$ de $\left(\psi_{\tau_1(n)}\right)_n$ telle que

$$\inf \psi_\infty \geq \overline{\lim_{n}} \left[\inf \psi_{\tau_2(n)}\right] \ .$$

Il suffit donc de montrer que l'on peut extraire de $\left(\psi_{\tau_2(n)}\right)_n$ une suite $\left(\psi_{\tau_4(n)}\right)_n$ telle que

$$\inf \psi_\infty \leq \varliminf_n \left[\inf \psi_{\tau_4(n)}\right] \ .$$

On en déduira alors que la suite $(\inf \psi_n)_n$ de E $*$-converge pour l'ordre vers $\inf \psi_\infty$. De plus, si E possède une norme ordre-continue et si $\inf \psi_\infty \in E$, $(\inf \psi_n)_n$ convergera en norme vers $\inf \psi_\infty$.

Comme la suite $\left(x_{\tau_2(n)}\right)_n$ est relativement compacte, on peut en extraire une suite $\left(x_{\tau_3(n)}\right)_n$ qui converge vers un $x \in X$. De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{\tau_3(n)} \in \varepsilon_{\tau_3(n)}$ -Argmin $\psi_{\tau_3(n)}$, on a $x \in \mathrm{Ls}(\varepsilon_{\tau_3(n)}$ -Argmin $\psi_{\tau_3(n)})$. Par la proposition 6.11, on peut affirmer que Argmin ψ_∞ est non vide. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $h_n \in E_+$ avec $\|h_n\| \leq \varepsilon_{\tau_3(n)}$ tel que

$$\psi_{\tau_3(n)}(x_{\tau_3(n)}) \leq \inf \psi_{\tau_3(n)} + h_n \ .$$

Quitte à extraire une sous-suite, grâce à la proposition 3.7, on peut supposer que $(h_n)_n$ converge pour l'ordre vers 0. De plus, d'après le lemme 6.10, on peut extraire une suite $\left(\psi_{\tau_4(n)}\right)_n$ telle que

$$\begin{aligned}
\min \psi_\infty = \psi_\infty(x) &\leq \varliminf_n \psi_{\tau_4(n)}(x_{\tau_4(n)}) \\
&\leq \varliminf_n \left[\inf \psi_{\tau_4(n)} + h_{\tau_4(n)}\right] \\
&\leq \varliminf_n \left[\inf \psi_{\tau_4(n)}\right] + \varlimsup_n h_{\tau_4(n)} \\
&\leq \varliminf_n \left[\inf \psi_{\tau_4(n)}\right] \ ,
\end{aligned}$$

où l'avant dernière inégalité provient du lemme 3.10. □

CHAPITRE IV

CONVERGENCE DES INTÉGRANDES VECTORIELS

1. Introduction.

Dans ce chapitre, on applique les résultats du chapitre III aux intégrandes vectoriels : l'approximation lipschitzienne des applications vectorielles passe aisément aux intégrandes vectoriels et permet de définir leur espérance conditionnelle.

D'autre part, en utilisant la V-convergence introduite au précédent chapitre, on généralise aux intégrandes vectoriels, la loi forte des grands nombres et un théorème ergodique. Ces deux derniers résultats sont inspirés de ceux donnés pour les intégrandes réels par H. Attouch & R. Wets ([AW2]), C. Hess ([H]) et C. Castaing & F. Ezzaki ([CE]).

2. Notations.

On suppose que E est un treillis de Banach complet, séparable et réflexif de dual fort E' muni de l'ordre canonique de cône positif E'_+. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire de dualité entre E et E'. Soit $(f_n)_n$ une suite dense dans E'. Alors la suite $(f_n^+)_n = (\sup(f_n, 0))_n$ est dense dans E'_+. Il est bon de remarquer ([Sc, Proposition II.5.15 & Theorem II.5.16]) que

$$e \in E_+ \iff \forall f \in E'_+,\ \langle e, f \rangle \geq 0 \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \langle e, f_n^+ \rangle \geq 0 \ .$$

Soit (X, d) est un espace métrique souslinien. Quitte à considérer la distance équivalente $\tilde{d} = \inf\{1, d\}$, on peut supposer que d est bornée. On désigne par $\mathcal{B}(X)$ la tribu borélienne de X.

On note $\mathcal{B}(E)$ la tribu borélienne de E et on munit $E^\bullet$ de la tribu $\mathcal{B}^\bullet(E)$ engendrée par $\mathcal{B}(E)$ et $\{+\infty\}$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé complet et $(\Theta, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On note $\widehat{\mathcal{T}}$ la tribu des ensembles universellement mesurables ([CV, Definition III.21] ou [DM, Remarques II.32]). Remarquons que $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.

Pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ (resp. $\mathcal{B}(E)$, $\mathcal{B}^\bullet(E)$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{T}$), on note 1_A la fonction caractéristique de A.

Finalement, on note $L^0_X(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ l'espace des classes de fonctions $\mathcal{F}$-mesurables de Ω dans X et $L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ l'espace des classes de fonctions $\mathcal{F}$-mesurables Bochner intégrables de Ω dans E .

3. Approximation des intégrandes.

Définition 3.1. Soit $\Psi\colon \Theta \times X \longrightarrow E^\bullet$. On dit que Ψ est

- un $\mathcal{T}$*–intégrande* si Ψ est une application $(\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(X), \mathcal{B}^\bullet(E))$-mesurable ;
- un $\mathcal{T}$*–intégrande normal* (*propre*) si Ψ est un intégrande et si pour tout $\xi \in \Theta$, l'application $x \longmapsto \Psi(\xi, x)$, $X \longrightarrow E^\bullet$ est inf-continue (propre) sur X.

Remarque 3.2. On dit qu'une application $\psi\colon \Theta \longrightarrow E^\bullet$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}^\bullet(E))$-mesurable si pour tout $A \in \mathcal{B}^\bullet(E)$, $\psi^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. Lorsque $\psi(\Theta) \subset E$, comme E est séparable, ceci est équivalent à l'existence d'une suite d'applications mesurables étagées convergeant simplement vers ψ. En utilisant la réflexibilité de E, c'est encore équivalent à la mesurabilité des applications $\xi \longmapsto \langle \psi(\xi), f\rangle$ pour tout $f \in E'$.

Lemme 3.3. *Soit* $\Psi\colon \Theta \times X \longrightarrow E^\bullet$ *un intégrande propre. Alors la multiapplication* $\Gamma\colon \Theta \Longrightarrow X, \xi \longmapsto \mathrm{dom}(\Psi(\xi, \cdot)) = \{x \in X : \Psi(\xi, x) \in E\}$ *est à valeurs non vides de graphe* $\mathrm{gr}\,\Gamma = \{(\xi, x) \in \Theta \times X : \Psi(\xi, x) \in E\}$ *mesurable dans* $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(X)$*. En particulier, il existe une suite* $(\sigma_n)_n$ *de sélections* $(\widehat{\mathcal{T}}, \mathcal{B}(X))$*-mesurables de* Γ *telle que pour tout* $\xi \in \Theta$, $(\sigma_n(\xi))_n$ *soit dense dans* $\Gamma(\xi)$.

Preuve. Il est clair que $\mathrm{gr}\,\Gamma = \Psi^{-1}(E) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(X)$. L'existence de la suite dense de sélections mesurables de Γ provient de [CV, Theorem III.22]. □

Théorème 3.4. *Soit* $\Psi, \Psi_n\colon \Theta \times X \longrightarrow E^\bullet$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ *des* $\mathcal{T}$*–intégrandes normaux propres. On suppose de plus que*

(i) *il existe une application mesurable* $a\colon \Theta \longrightarrow E_+$, $b \in E_+$ *et une application* $u_0\colon \Theta \longrightarrow X$ *telles que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $(\xi, x) \in \Theta \times X$,

$$-a(\xi) - d(x, u_0(\xi))b \leq \Psi_n(\xi, x) \leq \Psi(\xi, x)\ ;$$

(ii) *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $\xi \in \Theta$, $\mathrm{dom}(\Psi_n(\xi, \cdot)) = \mathrm{dom}(\Psi(\xi, \cdot))$.

Alors il existe une application $\widehat{\mathcal{T}}$*-mesurable* $h\colon \Theta \longrightarrow E^1_+$ *et* $k_0 \in \mathbb{N}^*$ *tels que les* $\widehat{\mathcal{T}}$*-intégrandes* $\Psi^k_n\colon \Theta \times X \longrightarrow E$ *définis pour tout* $k \geq k_0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, par*

$$\Psi^k_n(\xi, x) = \inf_{y \in X} \{\Psi_n(\xi, y) + kd(x, y)h(\xi)\}\ , \quad \forall (\xi, x) \in \Theta \times X\ ,$$

vérifient les propriétés suivantes :

(1) $|\Psi^k_n(\xi, x) - \Psi^k_n(\xi, y)| \leq kd(x, y)h(\xi), \quad \forall (\xi, x, y) \in \Theta \times X \times X$;

(2) $\|\Psi^k_n(\xi, x) - \Psi^k_n(\xi, y)\| \leq kd(x, y), \quad \forall (\xi, x, y) \in \Theta \times X \times X$;

(3) $-a(\xi) - d(x, u_0(\xi))b \leq \Psi^k_n(\xi, x) \leq \Psi^{k+1}_n(\xi, x) \leq \Psi_n(\xi, x), \quad \forall (\xi, x) \in \Theta \times X$;

(4) $\Psi_n(\xi, x) = \sup_k \Psi^k_n(\xi, x), \quad \forall (\xi, x) \in \Theta \times X$;

(5) $\Psi_n(\xi, x) = \lim_k \Psi^k_n(\xi, x), \quad \forall \xi \in \Theta, \forall x \in \mathrm{dom}(\Psi_n(\xi, \cdot))$;

(6) $\Psi_n(\xi, x) = \operatorname{tsup}_k \Psi^k_n(\xi, x), \quad \forall \xi \in \Theta, \forall x \in \overline{\mathrm{dom}}(\Psi_n(\xi, \cdot))$.

De plus, pour $\xi \in \Theta$, considérons la suite d'applications $(\Psi_n(\xi,\cdot))_n$ définies de X dans $E^\bullet$. On a

$$\begin{aligned}
\text{V-}\underline{\lim}\,\Psi_n(\xi,\cdot) &= \sup_k \underline{\lim}_{n\to\infty}\ \psi_n^k(\xi,\cdot)\ ,\\
\text{V-}\overline{\lim}\,\Psi_n(\xi,\cdot) &= \sup_k \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \psi_n^k(\xi,\cdot)\ ,
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le lemme 3.3, il existe une suite $(\sigma_m)_m$ de sélections $(\widehat{\mathcal{T}},\ \mathcal{B}(X))$-mesurables de la multiapplication Γ telle que pour tout $\xi \in \Theta$, $(\sigma_m(\xi))_m$ soit dense dans $\Gamma(\xi)$. Pour tout $\xi \in \Theta$, le théorème III.5.1 permet d'affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\Psi_n^k(\xi,\cdot))_k$ définie dans l'énoncé avec k_0 partie entière de $6(\|b\|+1)+1$ et

$$h(\xi) = \frac{1}{3}\left[\frac{a(\xi)}{\|a(\xi)\|+1} + \frac{b}{\|b\|+1} + \sum_m 2^{-m}\,\frac{|\Psi(\xi,\sigma_m(\xi))|}{\|\Psi(\xi,\sigma_m(\xi))\|+1}\right]\ ,$$

vérifie bien les propriétés (1) à (6). Il ne reste qu'à montrer la mesurabilité des applications Ψ_n^k. Il est clair que h est une application $(\widehat{\mathcal{T}},\mathcal{B}(X))$-mesurable. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \geq k_0$. Pour tout $\xi \in \Theta$ et pour tout $(x,y) \in X \times X$, posons $\widetilde{\Psi}_n^k(\xi,x,y) = \Psi_n^k(\xi,y) + kd(x,y)h(\xi)$. On a $\Psi_n^k(\xi,x) = \inf_{y\in\Gamma(\xi)} \widetilde{\Psi}_n^k(\xi,x,y)$. Soit $f \in E'_+$ et $x \in X$. D'après [Sc, Corollary II.4.2.1], on a pour tout $\xi \in \Theta$,

$$\begin{aligned}
\langle \Psi^k(\xi,x), f\rangle = \inf\Bigg\{ &\sum_{i=1}^n \langle \widetilde{\Psi}_n^k(\xi,x,y_i), f_i\rangle :\\
&\qquad y_i \in \Gamma(\xi),\ f_i \in E'_+,\ i=1\dots n, \sum_{i=1}^n f_i = f,\ n\in\mathbb{N}^*\Bigg\}\ .
\end{aligned}$$

On a alors pour $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
A &= \{\xi \in \Theta : \langle \Psi_n^k(\xi,x), f\rangle < r\}\\
&= \bigcup_n \mathrm{Proj}_\Theta\Bigg[\Bigg\{(\xi,y_1,\dots,y_n,f_1,\dots,f_n) \in \Theta\times X^n \times (E'_+)^n :\\
&\qquad \sum_{i=1}^n \langle \widetilde{\Psi}_n^k(\xi,x,y_i), f_i\rangle < r,\ \sum_{i=1}^n f_i = f\Bigg\} \bigcap \Big(\mathrm{gr}\,\Gamma^n \times (E'_+)^n\Big)\Bigg]\ ,
\end{aligned}$$

où $\Gamma^n(\xi) = \Gamma(\xi) \times \overset{n \text{ fois}}{\cdots} \times \Gamma(\xi)$, $\mathrm{gr}\,\Gamma^n$ désigne le graphe de la multiapplication Γ^n et Proj_Θ la projection sur Θ. Grâce au théorème de projection mesurable ([CV, Theorem III.23]), $A \in \widehat{\mathcal{T}}$. L'application $\xi \longmapsto \langle \Psi_n^k(\xi,x), f\rangle$ est donc mesurable. Soit à présent $f \in E'$. On a la décomposition $f = f^+ - f^-$ où $f^+, f^- \in E'_+$. L'application $\xi \longmapsto \langle \Psi_n^k(\xi,x), f\rangle$ est bien mesurable, comme différence des deux applications mesurables $\xi \longmapsto \langle \Psi_n^k(\xi,x), f^+\rangle$ et $\xi \longmapsto \langle \Psi_n^k(\xi,x), f^-\rangle$. Ce qui prouve la mesurabilité de l'application $\xi \longmapsto \Psi^k(\xi,x)$. D'autre part, comme $x \longmapsto \Psi_n^k(\xi,x)$ est lipschitzienne pour tout $\xi \in \Theta$, on en déduit la mesurabilité de Ψ_n^k — voir [CV, Lemma III.14]. La fin du théorème provient de la proposition III.6.3. $\square$

Corollaire 3.5. *Soit $\Psi\colon \Theta \times X \longrightarrow E^\bullet$ un $\mathcal{T}$–intégrande normal propre. On suppose qu'il existe une application mesurable $a\colon \Theta \longrightarrow E_+$, $b \in E_+$ et une application $u_0\colon \Theta \longrightarrow X$ tels que*

$$\forall(\xi, x) \in \Theta \times X\ , \qquad \Psi(\xi, x) \geq -a(\xi) - d(x, u_0(\xi))b\ .$$

Alors il existe une application $\widehat{\mathcal{T}}$-mesurable $h\colon \Theta \longrightarrow E^1_+$ et $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que les $\widehat{\mathcal{T}}$-intégrandes $\Psi^k\colon \Theta \times X \longrightarrow E$ définis pour tout $k \geq k_0$ par

$$\Psi^k(\xi, x) = \inf_{y \in X} \{\Psi(\xi, y) + kd(x, y)h(\xi)\}\ , \quad \forall(\xi, x) \in \Theta \times X\ ,$$

vérifient les propriétés suivantes :

(1) $|\Psi^k(\xi, x) - \Psi^k(\xi, y)| \leq kd(x, y)h(\xi), \quad \forall(\xi, x, y) \in \Theta \times X \times X$;

(2) $\|\Psi^k(\xi, x) - \Psi^k(\xi, y)\| \leq kd(x, y), \quad \forall(\xi, x, y) \in \Theta \times X \times X$;

(3) $-a(\xi) - d(x, u_0(\xi))b \leq \Psi^k(\xi, x) \leq \Psi^{k+1}(\xi, x) \leq \Psi(\xi, x), \quad \forall(\xi, x) \in \Theta \times X$;

(4) $\Psi(\xi, x) = \sup_k \Psi^k(\xi, x), \quad \forall(\xi, x) \in \Theta \times X$;

(5) $\Psi(\xi, x) = \lim_k \Psi^k(\xi, x), \quad \forall\xi \in \Theta, \forall x \in \mathrm{dom}(\Psi(\xi, \cdot))$;

(6) $\Psi(\xi, x) = \operatorname{tsup}_k \Psi^k(\xi, x), \quad \forall\xi \in \Theta, \forall x \in \overline{\mathrm{dom}}(\Psi(\xi, \cdot))$.

Remarques 3.6. De la même façon que pour les applications vectorielles (c.f., Remarques III.5.4), on peut faire les remarques suivantes :

1. Toute application $\widehat{\mathcal{T}}$-mesurable $h\colon \Theta \longrightarrow E^1_+$ vérifiant les hypothèses suivantes peut être utilisée dans la formule d'approximation :

(i) pour tout $\xi \in \Theta$, il existe $\nu_a(\xi), \nu_b \in \mathbb{R}^+$ tels que $a(\xi) \leq \nu_a(\xi)h(\xi)$ et $b \leq \nu_b h(\xi)$;

(ii) il existe une suite $(\sigma_m)_m$ de sélections $\widehat{\mathcal{T}}$-mesurables de la multiapplication $\Gamma\colon \xi \longmapsto \mathrm{dom}(\Psi(\xi, \cdot))$ telle que $(\sigma_m(\xi))_m$ soit dense dans $\Gamma(\xi)$ et

$$\forall\xi \in \Theta, \forall m \in \mathbb{N}^*, \exists\alpha_m(\xi) \in \mathbb{R}^+\ , \quad \psi(\xi, \sigma_m(\xi)) \leq \alpha_m(\xi)h(\xi)\ .$$

2. Si $(\Psi_n)_n$ est une suite d'intégrandes vérifiant les hypothèses du corollaire 3.5, on peut supposer que l'élément $h(\xi)$ de E^1_+ ne dépend pas de n.

4. Quelques résultats sur l'intégration des applications vectorielles.

On donne trois résultats utiles pour la suite.

Lemme 4.1. *Soit* $\psi \in L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. *Alors*

$$\psi \geq 0 \quad \mu\text{-p.p.} \iff \int_A \psi \, d\mu \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{F} .$$

Preuve. Supposons ψ positive presque partout, et soit $A \in \mathcal{F}$. On a

$$\int_A \psi \, d\mu \in \mu(A) \, \overline{\mathrm{co}} \, \psi(A) \subset \mu(A) E_+ \subset E_+ .$$

Réciproquement, supposons que $A = \{\omega \in \Omega : \psi(\omega) \not\geq 0\}$ est de mesure strictement positive. On a

$$A = \bigcup_n \bigcup_p \{\omega \in \Omega : \langle \psi(\omega), f_n^+ \rangle \leq -\tfrac{1}{p}\} .$$

Il existe donc n et p dans $\mathbb{N}^*$ tels que $A_n^p = \{\omega \in \Omega : \langle \psi(\omega), f_n^+ \rangle \leq -\frac{1}{p}\}$ soit de mesure strictement positive. On obtient alors

$$\Big\langle \int_{A_n^p} \psi(\omega) \, d\mu, f_n^+ \Big\rangle = \int_{A_n^p} \langle \psi(\omega), f_n^+ \rangle \, d\mu \leq -\tfrac{1}{p} \mu(A_n^p) < 0 ,$$

ce qui contredit l'hypothèse $\int_A \psi \, d\mu \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$. □

Proposition 4.2. *Soit* $(\psi_n)_n$ *une suite croissante de* $L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *telle que* $\sup_n \|\psi_n\| \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$. *Alors* $\psi = \sup_n \psi_n$ *existe,* $\psi \in L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *et*

$$\int_\Omega \psi \, d\mu = \sup_n \int_\Omega \psi_n \, d\mu = \lim_n \int_\Omega \psi_n \, d\mu .$$

Preuve. Comme pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, $(\psi_n(\omega))_n$ est une suite croissante bornée en norme, elle converge dans E vers $\psi(\omega)$. De plus, comme $\sup_n \|\psi\| \in L^1_{\mathbb{R}}$, du théorème de Lebesgue on déduit que $\psi \in L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et que ψ_n converge vers ψ dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Ce qui donne le résultat. □

Proposition 4.3. *Soit* Ψ_1 *et* Ψ_2 *deux* $\mathcal{F}$*–intégrandes de* $\Omega \times X$ *dans* E *tels que*

(i) *il existe une application mesurable* $a \colon \Omega \longrightarrow E_+$, $b \in E_+$ *et une application* $u_0 \colon \Omega \longrightarrow X$ *tels que pour un* $i \in \{1, 2\}$,

$$-a(\omega) - d(x, u_0(\omega)) b \leq \Psi_i(\omega, x) , \quad \forall (\omega, x) \in \Omega \times X ;$$

(ii) *pour tout* $u \in L^0_X(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *et* $A \in \mathcal{F}$, *on a* $\Psi_i(\cdot, u(\cdot)) \in L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $i = 1, 2$ *et*

$$\int_A \Psi_1(\omega, u(\omega)) \, d\mu \leq \int_A \Psi_2(\omega, u(\omega)) \, d\mu .$$

Alors il existe un μ*-négligeable* N *tel que*

$$\forall (\omega, x) \in (\Omega \setminus N) \times X , \quad \Psi_1(\omega, x) \leq \Psi_2(\omega, x) .$$

Preuve. Soit $(f_n^+)_n$ une suite dense dans E'_+. Il suffit de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un μ-négligeable N_n tel que

$$\forall (\omega, x) \in (\Omega \setminus N_n) \times X , \quad \langle \Psi_1(\omega, x), f_n^+ \rangle \leq \langle \Psi_2(\omega, x), f_n^+ \rangle .$$

Or ceci est un résultat classique – voir par exemple [Bu, Proposition 2.1.3]. □

5. Espérance conditionnelle des intégrandes.

Soit à présent $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-σ-algèbre μ-complète de $\mathcal{F}$. On rappelle que si $\psi \in L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, il existe une application unique $E^{\mathcal{G}}\psi \in L^1_E(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ avec $\|E^{\mathcal{G}}\psi\|_{L^1} \leq \|\psi\|_{L^1}$ et telle que

$$\forall B \in \mathcal{G}\ , \quad \int_B E^{\mathcal{G}}\psi\, d\mu = \int_B \psi\, d\mu\ ,$$

voir [DU, Theorem V.1.4]. De plus, on a $\|E^{\mathcal{G}}\psi\| \leq E^{\mathcal{G}}(\|\psi\|)$, μ-p.p. L'application $E^{\mathcal{G}}\psi$ est appelée l'espérance conditionnelle de ψ par rapport à $\mathcal{G}$. L'application $E^{\mathcal{G}} \colon \psi \longmapsto E^{\mathcal{G}}\psi$ est linéaire continue de $L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$.

Lemme 5.1. *Soit $\psi \in L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Alors*

$$\psi \geq 0 \quad \mu\text{-}p.p. \implies E^{\mathcal{G}}\psi \geq 0 \quad \mu\text{-}p.p.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme 4.1 (dans $L^1_E(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$). Soit $A \in \mathcal{G}$. On a

$$\int_A E^{\mathcal{G}}\psi\, d\mu = \int_A \psi\, d\mu \geq 0\ .$$

D'où $E^{\mathcal{G}}\psi \geq 0 \quad \mu$-p.p. $\square$

On utilisera le résultat de C. Castaing suivant :

Théorème 5.2. ([CE, Theorem 2.1]) *Soit $\Phi \colon \Omega \times X \longrightarrow [0, +\infty]$ un $\mathcal{F}$-intégrande réel. Il existe un $\mathcal{G}$-intégrande $E^{\mathcal{G}}\Phi$ espérance conditionnelle de Φ par rapport à $\mathcal{G}$: pour tout $u \in L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ et tout $A \in \mathcal{F}$, on a*

$$\int_A E^{\mathcal{G}}\Phi(\omega, u(\omega))\, d\mu(\omega) = \int_A \Phi(\omega, u(\omega))\, d\mu\ .$$

L'intégrande $E^{\mathcal{G}}\Phi$ est unique modulo les ensembles de la forme $N \times X$ où N est un μ-négligeable de $\mathcal{G}$.

Remarque 5.3. Il est clair, que pour tout $u \in L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, on a μ-p.p. $E^{\mathcal{G}}\Phi(\omega, u(\omega)) = E^{\mathcal{G}}[\Phi(\omega, u(\omega))]$ où $E^{\mathcal{G}}[\Phi(\omega, u(\omega))]$ représente l'espérance conditionnelle de l'application $\omega \longmapsto \Phi(\omega, u(\omega))$. Dans la suite, on utilisera à plusieurs reprises ce fait et cette notation.

On donne dans le théorème 5.6 un résultat d'existence de l'espérance conditionnelle d'un intégrande vectoriel normal basé sur le résultat d'approximation du corollaire 3.5. Tout d'abord, on étudie le cas ordre-lipschitzien.

Proposition 5.4. *Soit $\Psi \colon \Omega \times X \longrightarrow E$ un $\mathcal{F}$–intégrande tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et une application $\mathcal{F}$-mesurable $h \colon \Omega \longrightarrow E^1_+$ avec*

$$\forall(\omega, x, y) \in \Omega \times X \times X\ , \quad |\Psi(\omega, x) - \Psi(\omega, y)| \leq \lambda d(x, y) h(\omega)\ .$$

On suppose de plus qu'il existe $\overline{u} \in L^0_X(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ avec $\Psi(\cdot, \overline{u}(\cdot)) \in L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Alors il existe un $\mathcal{G}$–intégrande $E^{\mathcal{G}}\Psi \colon \Omega \times X \longrightarrow E$ tel que

$$\forall(\omega, x, y) \in \Omega \times X \times X \ , \quad |E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, x) - E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, y)| \leq \lambda d(x, y) E^{\mathcal{G}} h(\omega) \ ,$$

et tel que pour tout $A \in \mathcal{G}$ et tout $u \in L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, on ait

$$\int_A E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, u(\omega))\, d\mu(\omega) = \int_A \Psi(\omega, u(\omega))\, d\mu(\omega) \ .$$

De plus, l'intégrande $E^{\mathcal{G}}\Psi$ est unique modulo les ensembles de la forme $N \times X$ où N est un μ-négligeable de $\mathcal{G}$.

Preuve. Fixons $x \in X$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} |\Psi(\omega, x) - \Psi(\omega, \overline{u}(\omega))| &\leq \lambda d(x, \overline{u}(\omega)) h(\omega) \\ &\leq \lambda h(\omega) \ . \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

C'est à dire

$$\Psi(\omega, \overline{u}(\omega)) - \lambda h(\omega) \leq \Psi(\omega, x) \leq \Psi(\omega, \overline{u}(\omega)) + \lambda h(\omega) \ .$$

On en déduit que $\Psi(\cdot, x) \in L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. On peut donc définir son espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{G}$ notée $E^{\mathcal{G}}(\Psi(\cdot, x))$. Elle vérifie les propriétés suivantes :

i) Il existe $N_x \in \mathcal{G}$ avec $\mu(N_x) = 0$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N_x \ , \quad |E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, x)) - E^{\mathcal{G}}\left[\Psi(\omega, \overline{u}(\omega))\right]| \leq \lambda E^{\mathcal{G}} h(\omega) \ ,$$

Cela provient de (5.4.1) et du lemme 5.1.

ii) Soit $y \in X$. Alors, il existe $N_{x,y} \in \mathcal{G}$ avec $\mu(N_{x,y}) = 0$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N_{x,y} \ , \quad |E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, x)) - E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, y))| \leq \lambda d(x, y) h(\omega) \ .$$

En effet, pour tout $\omega \in \Omega$ on a

$$\Psi(\omega, x) - \Psi(\omega, y) \leq \lambda d(x, y) h(\omega) \ .$$

Du lemme 5.1, on déduit l'existence d'un μ-négligeable $N_{x,y}$ de $\mathcal{G}$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N_{x,y} \ , \quad E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, x)) - E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, y)) \leq \lambda d(x, y) E^{\mathcal{G}} h(\omega) \ .$$

De la même façon, on montre l'existence d'un μ-négligeable $N_{y,x}$ de $\mathcal{G}$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N_{y,x} \ , \quad E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, y)) - E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, x)) \leq \lambda d(x, y) E^{\mathcal{G}} h(\omega) \ .$$

On en déduit que

$$\forall\omega \in \Omega \setminus (N_{x,y} \cup N_{y,x}) \ , \quad |E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, x)) - E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, y))| \leq \lambda d(x, y)\, E^{\mathcal{G}} h(\omega) \ .$$

Soit alors D une partie dénombrable et dense dans X. Il existe un μ-négligeable N de $\mathcal{G}$ tel que pour tout $(x, y) \in D \times D$, $\omega \in \Omega \setminus N$, on ait

(1) $|E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, x)) - E^{\mathcal{G}}\left[\Psi(\omega, \overline{u}(\omega))\right]| \leq \lambda E^{\mathcal{G}} h(\omega)$;

(2) $E^{\mathcal{G}}(\Psi(\cdot, x)) \in L^1_E(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$;

(3) $|E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, x)) - E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, y))| \leq \lambda d(x, y) h(\omega)$.

Pour tout $\omega \in \Omega \setminus N$, l'application $x \longrightarrow E^{\mathcal{G}}(\Psi(\omega, x))$ est lipschitzienne sur D. On peut donc la prolonger sur X en une application uniformément continue notée $E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, \cdot)$, et on pose $E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, x) = 0$ pour $\omega \in N$ et $x \in X$. Il est facile de voir que $E^{\mathcal{G}}\Psi$ est un $\mathcal{G}$-intégrande et qu'il vérifie encore les propriétés (1), (2) et (3) précédentes pour tout $(x, y) \in X \times X$, $\omega \in \Omega$. De plus, pour tout $A \in \mathcal{G}$ et $u \in L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, on a $E^{\mathcal{G}}\Psi(\cdot, u(\cdot)) \in L^1_E(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ et

$$\int_A E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, u(\omega))\, d\mu = \int_A \Psi(\omega, u(\omega))\, d\mu \ . \tag{5.4.2}$$

En effet, soit $u \in L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ une fonction étagée à valeurs dans D : il existe une $\mathcal{G}$–partition $(A_i)_{i=1\ldots n}$ de Ω et $(x_i)_{i=1\ldots n} \subset D$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i} \ .$$

(Ceci n'est qu'une notation puisque X ne possède pas nécessairement de structure vectorielle). C'est à dire que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall\omega \in A_i$, $u(\omega) = x_i$. D'après (1), on a

$$\left|E^{\mathcal{G}}\Psi(\cdot, u(\cdot)) - E^{\mathcal{G}}\left[\Psi(\cdot, \overline{u}(\cdot))\right]\right| \leq \lambda E^{\mathcal{G}} h(\cdot) \ ,$$

et donc $E^{\mathcal{G}}\Psi(\cdot, u(\cdot)) \in L^1_E(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$. On a alors pour tout $A \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}\int_A E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, u(\omega))\, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \int_{A\cap A_i} E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, x_i)\, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{A\cap A_i} \Psi(\omega, x_i)\, d\mu \\ &= \int_A \Psi(\omega, u(\omega))\, d\mu \ .\end{aligned}$$

Soit à présent $u \in L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ quelconque. Il existe une suite $(u_n)_n$ d'applications de $L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ étagées à valeurs dans D qui converge μ-presque partout vers u. On a donc

$$\Psi(\cdot, u_n(\cdot)) \underset{n}{\longrightarrow} \Psi(\cdot, u(\cdot)) \quad \mu\text{-p.p.}$$
$$E^{\mathcal{G}}\Psi(\cdot, u_n(\cdot)) \underset{n}{\longrightarrow} E^{\mathcal{G}}\Psi(\cdot, u(\cdot)) \quad \mu\text{-p.p.}$$

De plus, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}\|\Psi(\omega, u_n(\omega))\| &\leq \|\Psi(\omega, u(\omega))\| + \lambda d(u_n(\omega), u(\omega)) \\ &\leq \|\Psi(\omega, u(\omega))\| + \lambda \,,\end{aligned}$$

et d'après la propriété (3) ci-dessus,

$$\begin{aligned}\|E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, u_n(\omega))\| &\leq \|E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, u(\omega))\| + \lambda d(u_n(\omega), u(\omega)) \\ &\leq \|E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, u(\omega))\| + \lambda \,.\end{aligned}$$

On remarque aussi que $E^{\mathcal{G}}\Psi(\cdot, u(\cdot)) \in L^1_E(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|E^{\mathcal{G}}\Psi(\cdot, u(\cdot))\| \leq \|E^{\mathcal{G}}\Psi(\cdot, u_n(\cdot))\| + \lambda.$$

En appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient alors pour tout $A \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned}\int_A E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, u(\omega))\, d\mu &= \lim_n \int_A E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, u_n(\omega))\, d\mu \\ &= \lim_n \int_A \Psi(\omega, u_n(\omega))\, d\mu \\ &= \int_A \Psi(\omega, u(\omega))\, d\mu \,.\end{aligned}$$

Ce qui prouve (5.4.2). L'unicité de l'intégrande $E^{\mathcal{G}}\Psi$ provient de la proposition 4.3. □

Remarque 5.5. De la même façon que pour le théorème 5.2 (Remarque 5.3), pour tout $u \in L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, on a $E^{\mathcal{G}}\Phi(\omega, u(\omega)) = E^{\mathcal{G}}[\Phi(\omega, u(\omega))]$, μ-p.p.

Théorème 5.6. *Soit $\Psi\colon \Omega \times X \longrightarrow E$ un $\mathcal{F}$–intégrande normal tel que*

(i) *il existe $a \in L^1_{E_+}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $b \in E_+$ et une application $\mathcal{F}$-mesurable $u_0\colon \Omega \longrightarrow X$ tels que,*

$$-a(\omega) - d(x, u_0(\omega))b \leq \Psi(\omega, x) \,, \quad \forall (\omega, x) \in \Omega \times X \,;$$

(ii) *pour tout sélection $u \in L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, on a $\Psi(\cdot, u(\cdot)) \in L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.*

Alors il existe un $\mathcal{G}$-intégrande normal $E^{\mathcal{G}}\Psi\colon \Omega \times X \longrightarrow E$ tel que pour tout $u \in L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ et tout $A \in \mathcal{G}$, on ait

$$\int_A E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, u(\omega))\, d\mu(\omega) = \int_A \Psi(\omega, u(\omega))\, d\mu(\omega) \,.$$

De plus, l'intégrande $E^{\mathcal{G}}\Psi$ est unique modulo les ensembles de la forme $N \times X$ où N est un μ-négligeable de $\mathcal{G}$. On appelle $E^{\mathcal{G}}\Psi$ l'espérance conditionnelle de Ψ par rapport à $\mathcal{G}$.

Preuve. Soit $(\Psi^k)_{k\geq k_0}$ la suite définie dans le corollaire 3.5. D'après la proposition 5.4, il existe un $\mathcal{G}$–intégrande $E^{\mathcal{G}}\Psi^k\colon \Omega\times X \longrightarrow E$ espérance conditionnelle de Ψ^k par rapport à $\mathcal{G}$. Pour tout entier $k\geq k_0$ et tout $(\omega,x)\in\Omega\times X$, on a

$$\Psi^k(\omega,x)\leq \Psi^{k+1}(\omega,x)\ .$$

Il existe[9] donc, d'après la proposition 4.3, un μ-négligeable N de $\mathcal{G}$ tel que

$$E^{\mathcal{G}}\Psi^k(\omega,x)\leq E^{\mathcal{G}}\Psi^{k+1}(\omega,x)\,,\qquad \forall k\geq k_0,\,\forall(\omega,x)\in(\Omega\setminus N)\times X\ .$$

D'après le théorème 5.2, il existe un $\mathcal{G}$–intégrande $E^{\mathcal{G}}\|\Psi\|(\omega,x)$ espérance conditionnelle de l'intégrande $(\omega,x)\longmapsto\|\Psi(\omega,x)\|$. D'après la proposition 4.3, il existe[10] un μ-négligeable $N'\in\mathcal{G}$ contenant N tel que pour tout entier $k\geq k_0$ et tout $(\omega,x)\in(\Omega\setminus N')\times X$, on ait

$$\|E^{\mathcal{G}}\Psi^k(\omega,x)\|\leq E^{\mathcal{G}}\|\Psi^k\|(\omega,x)\ . \tag{5.6.1}$$

D'autre part, d'après le (3) du corollaire 3.5, pour tout entier $k\geq k_0$ et tout $(\omega,x)\in\Omega\times X$, on a

$$0\leq \Psi^k(\omega,x)+a(\omega)+d(x,u_0(\omega))b\leq\Psi(\omega,x)+a(\omega)+d(x,u_0(\omega))b,$$

d'où

$$\|\Psi^k(\omega,x)+a(\omega)+d(x,u_0(\omega))b\|\leq\|\Psi(\omega,x)+a(\omega)+d(x,u_0(\omega))b\|\ .$$

On en déduit que

$$\|\Psi^k(\omega,x)\|\leq\|\Psi(\omega,x)\|+2\|a(\omega)+d(x,u_0(\omega))b\|\ .$$

D'après (5.6.1) et la proposition 4.3, il existe[11] alors un μ-négligeable $N''\in\mathcal{G}$ contenant N' tel que pour tout $(\omega,x)\in(\Omega\setminus N'')\times X$,

$$\|E^{\mathcal{G}}\Psi^k(\omega,x)\|\leq E^{\mathcal{G}}\|\Psi^k\|(\omega,x)\leq E^{\mathcal{G}}(\|\Psi(\omega,x)\|+2\|a(\omega)+d(x,u_0(\omega))b\|)\ .$$

Comme de plus la suite $\left(E^{\mathcal{G}}\Psi^k(\omega,x)\right)_k$ est croissante, d'après le lemme III.3.2, elle converge dans E vers $\sup_k E^{\mathcal{G}}\Psi^k(\omega,x)$. On pose alors

$$E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega,x)=\begin{cases}\sup_k E^{\mathcal{G}}\Psi^k(\omega,x), & \text{pour } (\omega,x)\in(\Omega\setminus N'')\times X,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

[9] Plus précisément, pour tout $u\in L^0_X(\Omega,\mathcal{G},\mu)$, on a $\Psi^k(\omega,u(\omega))\leq\Psi^{k+1}(\omega,u(\omega))$. D'après le lemme 5.1, il existe un μ-négligeable N_u tel que pour tout $\omega\in\Omega\backslash N_u$, $E^{\mathcal{G}}\Psi^k(\omega,u(\omega))=E^{\mathcal{G}}\left[\Psi^k(\omega,u(\omega))\right]\leq E^{\mathcal{G}}\left[\Psi^{k+1}(\omega,u(\omega))\right]=E^{\mathcal{G}}\Psi^{k+1}(\omega,u(\omega))$. On intègre alors sur $A\in\mathcal{G}$, et on applique la proposition 4.3.

[10] En fait, pour tout $u\in L^0_X(\Omega,\mathcal{G},\mu)$, il existe un μ-négligeable N_u, tel que pour tout $\omega\in\Omega\setminus N_u$, $\|E^{\mathcal{G}}\Psi^k(\omega,u(\omega))\|=\|E^{\mathcal{G}}\left[\Psi^k(\omega,u(\omega))\right]\|\leq E^{\mathcal{G}}\left[\|\Psi^k(\omega,u(\omega))\|\right]=E^{\mathcal{G}}\|\Psi^k\|(\omega,x)$. On intègre alors sur $A\in\mathcal{G}$ et on applique la proposition 4.3.

[11] Voir les précédentes notes.

Grâce à la proposition III.4.7, il est clair que $E^{\mathcal{G}}\Psi$ est un $\mathcal{G}$-intégrande normal. D'autre part, pour tout $u \in L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, $\Psi^k(\omega, u(\omega))$ croit vers $\Psi(\omega, u(\omega))$ et $E^{\mathcal{G}}\Psi^k(\omega, u(\omega))$ vers $E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, u(\omega))$. On a alors (Proposition 4.2) pour tout $A \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned}\int_A E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, u(\omega))\, d\mu &= \lim_k \int_A E^{\mathcal{G}}\Psi^k(\omega, u(\omega))\, d\mu \\ &= \lim_k \int_A \Psi^k(\omega, u(\omega))\, d\mu \\ &= \int_A \Psi(\omega, u(\omega))\, d\mu \ .\end{aligned}$$

Ce qui finit de prouver le théorème, l'unicité provenant de la proposition 4.3. □

Remarques 5.7. 1. Pour tout $u \in L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$, on a toujours μ-p.p., $E^{\mathcal{G}}\Psi(\omega, u(\omega)) = E^{\mathcal{G}}[\Psi(\omega, u(\omega))]$.

2. Si X est un espace de Banach séparable, le théorème 5.6 reste vrai si on remplace $L^0_X(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ (resp. $L^0_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$) par $L^1_X(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ (resp. $L^1_X(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$).

3. Dans [Tb1, Chap. VI], L. Thibault obtient un résultat du même type pour des intégrandes vectoriels dits *θ-lipschitziens*.

6. Loi forte des grands nombres pour les intégrandes vectoriels.

Dans cette partie, on donne une version de la loi forte des grands nombres pour les intégrandes normaux vectoriels. Le résultat est déjà connu pour les intégrandes à valeurs réelles ([AW2], [H]). Celui présenté ici est inspiré des travaux de C. Hess ([H, Theorem 4.3]). Toutefois, le cadre vectoriel nous oblige à faire des hypothèses supplémentaires.

On donne tout d'abord un résultat sur l'espérance des intégrandes.

Proposition 6.1. *Soit $\Psi\colon \Omega \times X \longrightarrow E_+$ un $\mathcal{F}$–intégrande normal tel que*

$$\forall x \in X \ , \qquad \Psi(\cdot, x) \in L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \ .$$

Soit $(\Psi^k)_k$ la suite de $\mathcal{F}$–intégrandes ordre-lipschitziens approchant Ψ donnée par le corollaire 3.5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in X$, on définit

$$E\Psi^k(x) = \int_\Omega \Psi^k(\omega, x)\, d\mu(\omega) \ ,$$

et

$$E\Psi(x) = \int_\Omega \Psi(\omega, x)\, d\mu(\omega) \ .$$

Alors il existe $H \in E^1_+$ tel que

(1) $|E\Psi^k(x) - E\Psi^k(y)| \leq kd(x, y)H, \quad \forall (x, y) \in X \times X, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

(2) $\|E\Psi^k(x) - E\Psi^k(y)\| \leq kd(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times X, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

(3) $E\Psi(x) = \lim_k E\Psi^k(x) = \sup_k E\Psi^k(x), \quad \forall x \in X$.

En particulier, $E\Psi$ est une application inf-continue de X dans E_+.

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$, $\Psi^k(\omega, x)$ est définie par

$$\Psi^k(\omega, x) = \inf_{y \in X} \{\Psi(\omega, y) + kd(x, y)h(\omega)\} ,$$

où $h \in L^1_E(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Grâce au lemme 4.1, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $(\omega, x, y) \in \Omega \times X \times X$,

$$\begin{aligned} |E\Psi^k(x) - E\Psi^k(y)| &\leq \int_\Omega |\Psi^k(\omega, x) - \Psi^k(\omega, y)| \, d\mu(\omega) \\ &\leq \int_\Omega kd(x, y)h(\omega) \, d\mu(\omega) \\ &\leq kd(x, y) \int_\Omega h(\omega) \, d\mu(\omega) \ . \end{aligned}$$

On note alors $H = \int_\Omega h(\omega) \, d\mu(\omega)$. On a donc montrer (1) et (2) en découle. Fixons $x \in X$. D'après le théorème 3.4, pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$, on a $\Psi(\omega, x) = \lim_k \Psi^k(\omega, x) = \sup_k \Psi^k(\omega, x)$. De plus, on a $\|\Psi^k(\omega, x)\| \leq \|\Psi(\omega, x)\|$. La proposition 4.2 permet alors d'obtenir (3). D'autre part, grâce à la proposition III.4.7, $E\Psi$ est inf-continue. $\square$

Théorème 6.2. *Soit $(U_n)_n$ une suite de variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\Theta, \mathcal{T})$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) et $U : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Theta, \mathcal{T})$ une variable aléatoire. Soit $\Psi : \Theta \times X \longrightarrow E_+$ un $\mathcal{T}$–intégrande normal positif. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Psi(U_n(\omega), x) \leq \Psi(U(\omega), x) \ , \qquad \forall (\omega, x) \in \Omega \times X \ ,$$

et que pour tout $x \in X$, on a

$$\nu(x) = \sup_{\xi \in \Theta} \|\Psi(\xi, x)\| < +\infty \ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$, on pose

$$\Pi_n(\omega, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Psi(U_i(\omega), x) \ .$$

Il existe alors un μ-négligeable N tel que pour tout $\omega \in \Omega \setminus N$, on ait

$$\mathrm{V}^*_\mathrm{u}\text{-}\lim \Pi_n(\omega, \cdot) = E\Psi(U_1, \cdot) \ .$$

Preuve. On doit montrer qu'il existe un μ-négligeable N tel que pour tout $\omega \in \Omega \setminus N$ et pour toute sous-suite $(\Pi_{n_p})_p$ de $(\Pi_n)_n$, on sache extraire une suite $(\Pi_{n_q})_q$ telle que pour tout $x \in X$,

$$\mathrm{V}\text{-}\overline{\lim}\, \Pi_{n_q}(\omega, x) \leq E\Psi(U_1, x) \ , \tag{6.2.1}$$

$$\mathrm{V}\text{-}\underline{\lim}\, \Pi_{n_q}(\omega, x) \geq E\Psi(U_1, x) \ . \tag{6.2.2}$$

Soit $x \in X$. Comme l'application $\xi \longmapsto \Psi(\xi, x)$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(E))$-mesurable, la suite $(\Psi(U_i(\cdot), x))_i$ est i.i.d. D'après la loi forte des grands nombres vectorielle ([H-J, Theorem 5.1]) appliquée à la suite $(\Psi(U_i(\cdot), x))_i$, il existe un μ-négligeable N_x^1 tel que

$$\lim_n \Pi_n(\omega, x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Psi(U_i(\omega), x) = E\Psi(U_1, x) \ , \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N_x^1 \ .$$

Soit alors $D = \{x_m : m \in \mathbb{N}^*\}$ le sous-ensemble dénombrable dense dans X donné par la proposition III.4.13 (avec $\phi(x) = E\Psi(U_1, x)$). On pose

$$N_1 = \bigcup_{x \in D} N_x^1 \ .$$

On a donc pour tout $(\omega, x) \in (\Omega \setminus N_1) \times D$,

$$\lim_n \Pi_n(\omega, x) = E\Psi(U_1, x) \ . \tag{6.2.3}$$

D'autre part, on définit une application $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(E))$-mesurable $h \colon \Theta \longrightarrow E_1^+$ par

$$\forall \xi \in \Theta \ , \qquad h(\xi) = \sum_m 2^{-m} \frac{\Psi(\xi, x_m)}{\nu(x_m) + 1} \ .$$

Soit alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $(\xi, x) \in \Theta \times X$,

$$\Psi^k(\xi, x) = \inf_{y \in X} \{\Psi(\xi, y) + kd(x, y)h(\xi)\} \ .$$

Il est clair que Ψ_k approche Ψ dans le sens du corollaire 3.5. On pose

$$\Psi_{U_i}(\omega, x) = \Psi\left(U_i(\omega), x\right) \qquad \text{et} \qquad \Psi_{U_i}^k(\omega, x) = \Psi^k\left(U_i(\omega), x\right) \ .$$

Fixons $x \in X$. Remarquons que les U_i sont $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$-mesurables et donc $(\mathcal{F}, \widehat{\mathcal{T}})$-mesurables ([DM, Remarque II.32.c]). De plus, comme l'application $\xi \longmapsto \Psi^k(\xi, x)$ est $(\widehat{\mathcal{T}}, \mathcal{B}(E))$–mesurable, la suite $\left(\Psi_{U_i}^k(\cdot, x)\right)_i$ est i.i.d.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$, on a

$$\Pi_n(\omega, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Psi\left(U_i(\omega), x\right) \leq \Psi\left(U(\omega), x\right) \ .$$

(On en déduit que V-$\overline{\lim}\, \Pi_n(\omega, x) \in E$.) De plus, il est clair que Π_n est un $\mathcal{F}$–intégrande normal positif. D'après le théorème 3.4, il existe une suite $(\Pi_n^k)_k$ de $\mathcal{F}$–intégrandes ordre-lipschitziens approchant Π_n donnée par

$$\Pi_n^k(\omega, x) = \inf_{y \in X} \{\Pi_n(\omega, y) + kd(x, y)\tilde{h}(\omega)\} \ ,$$

où

$$\tilde{h}(\omega) = \sum_m 2^{-m} \frac{\Psi\left(U(\omega), x_m\right)}{\left\|\Psi\left(U(\omega), x_m\right)\right\| + 1} \ .$$

Considérons aussi

$$h\left(U(\omega)\right) = \sum_m 2^{-m} \frac{\Psi\left(U(\omega), x\right)}{\nu(x_m) + 1} \ .$$

On a

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \Omega \ , \qquad \tilde{h}(\omega) \geq h\left(U(\omega)\right) \geq h\left(U_i(\omega)\right) \ .$$

Il en découle que

$$\begin{aligned}
\Pi_n^k(\omega, x) &= \inf_{y \in X} \{\Pi_n(\omega, y) + kd(x, y)\tilde{h}(\omega)\} \\
&= \inf_{y \in X} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\Psi\left(U_i(\omega), y\right) + kd(x, y)\tilde{h}(\omega) \right] \right\} \\
&\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \inf_{y \in X} \{\Psi\left(U_i(\omega), y\right) + kd(x, y)\tilde{h}(\omega)\} \\
&\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \inf_{y \in X} \{\Psi\left(U_i(\omega), y\right) + kd(x, y)h\left(U_i(\omega)\right)\} \\
&\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Psi_{U_i}^k(\omega, x) \ . \qquad (6.2.4)
\end{aligned}$$

Fixons alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in X$. D'après la loi forte des grands nombres vectorielle ([H-J, Theorem 5.1]) appliquée à la suite de variables aléatoires i.i.d. $(\Psi_{U_i}^k(\cdot, x))_i$, il existe un μ-négligeable N_x^k tel que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Psi_{U_i}^k(\omega, x) = E\Psi^k(U_1, x) \ , \qquad \forall \omega \in \Omega \setminus N_x^k \ . \qquad (6.2.5)$$

Soit

$$N_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{x \in D} N_x^k \ , \quad \text{et} \quad N = N_1 \cup N_2 \ .$$

Fixons $\omega \in \Omega \setminus N$ et soit $(\Pi_{n_p})_p$ une sous-suite de $(\Pi_n)_n$. Pour tout $x \in D$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a d'après (6.2.3) et (6.2.5),

$$\begin{aligned}
&\lim_p \Pi_{n_p}(\omega, x) = E\Psi(U_1, x) \ , \\
&\lim_p \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} \Psi_{U_i}^k(\omega, x) = E\Psi^k(U_1, x) \ .
\end{aligned} \qquad (6.2.6)$$

D'après la proposition III.3.7, pour tout $x \in D$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(\tau_x^k(p))_p$ extraite de $(n_p)_p$ telle que

$$\left(\Pi_{\tau_x^k(p)}(\omega, x)\right)_p \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\tau_x^k(p)} \sum_{i=1}^{\tau_x^k(p)} \Psi_{U_i}^k(\omega, x) \right)_p$$

convergent pour l'ordre vers $E\Psi(U_1, x)$ et $E\Psi^k(U_1, x)$. En particulier, on a

$$\overline{\lim_n} \, \Pi_{\tau_x^k(p)}(\omega, x) \leq E\Psi(U_1, x) \ ,$$

$$\underline{\lim_n} \, \frac{1}{\tau_x^k(p)} \sum_{i=1}^{\tau_x^k(p)} \Psi_{U_i}^k(\omega, x) \geq E\Psi^k(U_1, x) \ . \tag{6.2.7}$$

On peut supposer que $\left(\tau_{x_{k+1}}^{k+1}(p)\right)_p$ est une sous-suite de $\left(\tau_{x_k}^k(p)\right)_p$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Posons alors $(n_q)_q = \left(\tau_{x_q}^q(q)\right)_q$. Pour tout $x \in D$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a d'après (6.2.7),

$$\overline{\lim_q} \, \Pi_{n_q}(\omega, x) \leq E\Psi(U_1, x) \ , \tag{6.2.8}$$

$$\underline{\lim_q} \, \frac{1}{n_q} \sum_{i=1}^{n_q} \Psi_{U_i}^k(\omega, x) \geq E\Psi^k(U_1, x) \ . \tag{6.2.9}$$

Montrons à présent (6.2.1) : d'après (6.2.8), on a pour tout $x \in D$,

$$E\Psi(U_1, x) \geq \overline{\lim_q} \, \Pi_{n_p}(\omega, x) \geq \text{V-}\overline{\lim} \, \Pi_{n_q}(\omega, x) \ .$$

Par la proposition III.6.3, $\text{V-}\overline{\lim} \, \Pi_{n_q}(\omega, \cdot)$ est inf-continue sur X. La proposition III.4.13 permet de conclure que pour tout $x \in X$, on a

$$E\Psi(U_1, x) \geq \text{V-}\overline{\lim} \, \Pi_{n_q}(\omega, x) \ .$$

Ce qui prouve (6.2.1). Montrons (6.2.2) : de (6.2.4) et (6.2.9), on déduit que pour tout $x \in D$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underline{\lim_q} \, \Pi_{n_q}^k(\omega, x) \geq E\Psi^k(U_1, x) \ . \tag{6.2.10}$$

Comme les deux membres de l'inégalité sont (ordre)-lipschitziens, (6.2.10) reste vrai pour tout $x \in X$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$. Finalement en prenant le suprémum sur $k \in \mathbb{N}^*$, on trouve, en tenant compte des propositions 6.1 et III.6.3 (ou du théorème 3.4),

$$\forall x \in X \ , \qquad \text{V-}\underline{\lim} \, \Pi_{n_q}(\omega, x) = \sup_k \underline{\lim_q} \, \Pi_{n_q}^k(\omega, x) \geq E\Psi(U_1, x) \ .$$

Ce qui prouve (6.2.2) et achève la preuve. $\square$

7. Théorème ergodique pour les intégrandes vectoriels.

Dans cette section, on établit un résultat de type ergodique pour un intégrande vectoriel normal. Un résultat du même type a été récemment démontré par C. Castaing et F. Ezzaki dans [CE].

Théorème 7.1. *Soit* $T\colon (\Omega,\mathcal{F},\mu) \longrightarrow (\Omega,\mathcal{F},\mu)$ *une application* $\mathcal{F}$*-mesurable préservant la mesure* μ (*i.e.* $\forall A \in \mathcal{F},\ \mu(T(A)) = \mu(A)$) *et ergodique* (*i.e.* $T(A) = A \implies \mu(A) = 0$ *ou* 1). *Soit* $\Psi\colon \Theta \times X \longrightarrow E_+$ *un* $\mathcal{T}$*–intégrande normal positif. On suppose qu'il existe un* $\mathcal{T}$*–intégrande normal positif* $\Phi\colon \Omega \times X \longrightarrow E_+$ *tel que*

$$\Psi\left(T^i\omega, x\right) \le \Phi(\omega,x)\,, \qquad \forall(\omega,x) \in \Omega \times X\,, \forall i \in \mathbb{N}\ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $(\omega,x) \in \Omega \times X$*, on pose*

$$\Pi_n(\omega,x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Psi\left(T^i\omega, x\right)\ .$$

Il existe alors un μ*-négligeable* N *tel que pour tout* $\omega \in \Omega \setminus N$*, on ait*

$$\mathrm{V}^*_{\mathrm{u}}\text{-}\lim \Pi_n(\omega,\cdot) = E\Psi(\cdot)\ .$$

Preuve. La preuve est en grande partie similaire à celle du théorème 6.2. On doit montrer qu'il existe un μ-négligeable N tel que pour tout $\omega \in \Omega \setminus N$ et pour toute sous-suite $(\Pi_{n_p})_p$ de $(\Pi_n)_n$, on sache extraire une suite $(\Pi_{n_q})_q$ telle que pour tout $x \in X$,

$$\mathrm{V}\text{-}\overline{\lim}\,\Pi_{n_q}(\omega,x) \le E\Psi(x)\ , \tag{7.1.1}$$

$$\mathrm{V}\text{-}\underline{\lim}\,\Pi_{n_q}(\omega,x) \ge E\Psi(x)\ . \tag{7.1.2}$$

Soit $x \in X$. D'après un théorème ergodique classique (c.f. [BS, Corollary 7] ou [Kr]) appliqué à $\Psi(\cdot,x)$, il existe un μ-négligeable N_x^1 tel que

$$\lim_n \Pi_n(\omega,x) = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Psi(T^i\omega,x) = E\Psi(x)\ , \quad \forall\omega \in \Omega\setminus N_x^1\ .$$

Soit alors $D = \{x_m : m \in \mathbb{N}^*\}$ le sous-ensemble dénombrable dense dans X donné par la proposition III.4.13 (avec $\phi(x) = E\Psi(x)$). On pose

$$N_1 = \bigcup_{x\in D} N_x^1\ .$$

On a donc pour tout $(\omega,x) \in (\Omega\setminus N_1)\times D$,

$$\lim_n \Pi_n(\omega,x) = E\Psi(x)\ . \tag{7.1.3}$$

Soit alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\Psi^k(\omega,x) = \inf_{y\in X}\{\Psi(\omega,y) + kd(x,y)h(\omega)\}$$

$$\Pi_n^k(\omega,x) = \inf_{y\in X}\{\Pi_n(\omega,y) + kd(x,y)h(\omega)\}\ ,$$

les approximations[12] de Ψ et Π_n données par le théorème 3.4. Il est clair que

$$\Pi_n^k(\omega, x) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Psi^k(T^i\omega, x) \ . \tag{7.1.4}$$

Fixons alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in X$. D'après [BS, Corollary 7] appliqué à $\Psi^k(\cdot, x)$, il existe un μ-négligeable N_x^k tel que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Psi^k(T^i\omega, x) = E\Psi^k(x) \ , \qquad \forall \omega \in \Omega \setminus N_x^k \ . \tag{7.1.5}$$

Soit

$$N_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{x \in D} N_x^k \ , \quad \text{et} \quad N = N_1 \cup N_2 \ .$$

Fixons $\omega \in \Omega \setminus N$ et soit $(\Pi_{n_p})_p$ une sous-suite de $(\Pi_n)_n$. Pour tout $x \in D$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a d'après (7.1.3) et (7.1.5),

$$\begin{aligned} &\lim_p \Pi_{n_p}(\omega, x) = E\Psi(x) \ , \\ &\lim_p \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} \Psi^k(T^i\omega, x) = E\Psi^k(x) \ . \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

D'après la proposition III.3.7, pour tout $x \in D$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(\tau_x^k(p))_p$ extraite de $(n_p)_p$ telle que

$$\left(\Pi_{\tau_x^k(p)}(\omega, x)\right)_p \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\tau_x^k(p)} \sum_{i=1}^{\tau_x^k(p)} \Psi^k(T^i\omega, x)\right)_p$$

convergent pour l'ordre vers $E\Psi(x)$ et $E\Psi^k(x)$. En particulier, on a

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_n} \, \Pi_{\tau_x^k(p)}(\omega, x) \leq E\Psi(x) \ , \\ &\underline{\lim_n} \frac{1}{\tau_x^k(p)} \sum_{i=1}^{\tau_x^k(p)} \Psi^k(T^i\omega, x) \geq E\Psi^k(U_1, x) \ . \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

On peut supposer que $\left(\tau_{x_{k+1}}^{k+1}(p)\right)_p$ est une sous-suite de $\left(\tau_{x_k}^k(p)\right)_p$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Posons alors $(n_q)_q = \left(\tau_{x_q}^q(q)\right)_q$. Pour tout $x \in D$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a d'après (7.1.7),

$$\overline{\lim_q} \, \Pi_{n_q}(\omega, x) \leq E\Psi(x) \ , \tag{7.1.8}$$

$$\underline{\lim_q} \frac{1}{n_q} \sum_{i=1}^{n_q} \Psi^k(T^i\omega, x) \geq E\Psi^k(x) \ . \tag{7.1.9}$$

[12]Remarquons que comme Π_n et Ψ sont majorés par Φ, on peut prendre la même fonction h dans les définitions de Π_n^k et Ψ^k.

Montrons à présent (7.1.1) : d'après (7.1.8), on a pour tout $x \in D$,

$$E\Psi(x) \geq \overline{\lim_q}\, \Pi_{n_p}(\omega, x) \geq \text{V-}\overline{\lim}\, \Pi_{n_q}(\omega, x)\ .$$

Par la proposition III.6.3, V-$\overline{\lim}\, \Pi_{n_q}(\omega, \cdot)$ est inf-continue sur X. La proposition III.4.13 permet de conclure que pour tout $x \in X$, on a

$$E\Psi(x) \geq \text{V-}\overline{\lim}\, \Pi_{n_q}(\omega, x)\ .$$

Ce qui prouve (7.1.1). Montrons (7.1.2) : de (7.1.4) et (7.1.9), on déduit que pour tout $x \in D$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underline{\lim_q}\, \Pi^k_{n_q}(\omega, x) \geq E\Psi^k(x)\ . \tag{7.1.10}$$

Comme les deux membres de l'inégalité sont (ordre)-lipschitziens, (7.1.10) reste vrai pour tout $x \in X$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$. Finalement en prenant le suprémum sur $k \in \mathbb{N}^*$, on trouve, en tenant compte des propositions 6.1 et III.6.3 (ou du théorème 3.4),

$$\forall x \in X\ , \qquad \text{V-}\underline{\lim}\, \Pi_{n_q}(\omega, x) = \sup_k \underline{\lim_q}\, \Pi^k_{n_q}(\omega, x) \geq E\Psi(x)\ .$$

Ce qui prouve (7.1.2) et achève la preuve. $\square$

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce bref chapitre annoncé “conclusion générale” regroupe diverses remarques plus ou moins générales sur différents points des chapitres précédents ainsi que quelques idées n’ayant pas encore été développées. Par commodité, je les présente par chapitres.

Remarques sur le chapitre I.

Dans tout ce chapitre, on a supposé que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ était un espace probabilisé complet. Il est clair qu’il suffit de supposer μ finie. De plus l’hypothèse de complétude, i.e., $\mathcal{F}$ μ-complète, peut être facilement supprimée ([BGJ, Proof of Lemma 4.3]) : la principale difficulté est dû à l’utilisation de sélections $\mathcal{F}$-mesurables d’une multifonction. Or, en raisonnant comme dans [HU, Remark 1, p. 163], il n’est pas nécessaire de supposer $\mathcal{F}$ μ-complète.

Remarques sur le chapitre II.

Dans ce chapitre, nous avons essayé de considérer les espaces les plus généraux pour X et E. Toutefois, par soucis de simplification, nous nous sommes limités à prendre pour X un espace topologique polonais et pour E un espace de Banach réflexif séparable. On doit pouvoir avec beaucoup de prudence supprimer l’hypothèse de reflexibilité sur E. Toutefois, cela apporte quelques difficultés supplémentaires dans l’utilisation des mesures vectorielles. (Voir [No1], [No2]). Les hypothèses sur X peuvent être plus facilement affaiblies. Le théorème 6.1 reste valide pour un espace topologique complètement régulier souslinien X. Toutefois, pour établir les résultats d’épi-convergence de la section 3, il est nécessaire de supposer X parfaitement normal (pour appliquer le théorème de Michael) et vérifiant le premier axiome de dénombrabilité.

Dans la section 3, on a été amené à introduire une nouvelle notion de convergence pour les multifonctions Γ autre que la convergence point par point des images $\Gamma(t)$ au sens de Kuratowski. Plus précisément, on dit qu’une suite de multifonction $(\Gamma_k)_k$ d’un polonais S dans E *converge* vers Γ_∞ si

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty(s) \subset \mathrm{Li}\big(\Gamma_k(s_k)\big) \qquad & \forall s, s_k \in S\,, s_k \to s\ , \\ \mathrm{Ls}\big(\Gamma_k(s)\big) \subset \Gamma_\infty(s) \qquad & \forall s \in S\ . \end{aligned}$$

Dans la proposition III.3.6, on étudie quelques relations entre cette notion et d'autres définitions. De plus, il est clair que (pour des multifonctions à valeurs convexes fermées) la limite est unique puisque pour tout $s \in S$, $\Gamma_\infty(s)$ est la limite au sens de Kuratowski-Painlevé de $(\Gamma_k(s))_k$. Il serait intéressant de voir si la limite Γ_∞ est semi-continue inférieurement sur S.

Le théorème III.5.5 suppose implicitement que la solution du processus de Rafle du second ordre n'est pas unique. Car sinon, l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ sur lequel on minimise la fonctionnelle intégrale serait réduit à un point ! A ma connaissance, personne n'a su jusqu'à présent démontrer la non-unicité (ou l'unicité) de la solution du processus de rafle du second ordre. L'avis des spécialistes semble pencher vers la non-unicité.

Remarques sur le chapitre III.

L'historique de l'approximation lipschitzienne considérée dans l'introduction du chapitre III est très flou. Il est difficile d'attribuer cette approximation de façon certaine à un auteur particulier. Dès 1899, R. Baire étudie les fonctions semi-continues et démontre qu'elles sont limites de fonctions continues. A ma connaissance[13], ses démonstrations n'utilisent pas d'approximation lipschitzienne. La "première" utilisation de l'approximation lipschitzienne serait faite[14] par Hausdorff en 1935 ("*Mengenlehre*," Dover, New York, 1935). A défaut de référence antérieure, il faudrait donc désigner cette approximation par "*Hausdorff approximation*."

Dans la section 6 concernant la convergence des applications vectorielles, on n'a considéré que des minima et infima classiques ("ideal minima" comme les nomment D.T. Luc dans [Lu]) c'est-à-dire définis par l'ordre sur E. Or dès que l'ordre n'est plus total, un minimum n'est généralement pas atteint — même à ε près. Pour cette raison, il est souvent nécessaire de considérer des *minima de Pareto* définis pour $A \subset E$ par

$$\text{P-min}(A) = \{e \in A : e \notin A + (E_+ \setminus \{0\})\} .$$

Lorsque E est de dimension finie, il est possible de définir une convergence variationnelle donnant des propriétés de convergence des Pareto (voir [Le2]). Lorsque E est de dimension infinie, l'entreprise est plus ardue. B. Lemaire dans [Le1] a introduit une notion de convergence variationnelle permettant aussi de conserver la convergence des Pareto. Cette convergence est définie en termes d'épigraphes et de complémentaire d'hypographes stricts. Jusqu'à présent, je n'ai pas réussi à établir de relation entre cette convergence et la convergence des approximations définies dans la section 5.

[13] Je me réfère à la Thèse de Baire de 1899 ainsi qu'à ses "*Leçon sur les fonctions discontinues*," Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[14] Je remercie E.J. Balder de m'avoir communiqué cette référence.

Remarques sur le chapitre IV.

Originellement, j'ai cherché à obtenir une approximation lipschitzienne des fonctions à valeurs vectorielles pour établir un résultat de représentation intégrale des fonctionnelles du type

$$\Psi\colon L^1_X \times \mathcal{F} \longrightarrow E_+,\ (u,A) \longmapsto \int_A \psi\big(\omega, u(\omega)\big)\, d\mu(\omega)\ .$$

Ce résultat est connu pour les fonctionnelles à valeurs réelles (voir e.g., [Bu]). Le problème essentiel que je n'ai pu résoudre est le suivant : si on suppose que $\Psi(u, A\cup B) = \Psi(u,A) + \Psi(u,B)$, ce qui est une hypothèse nécessaire pour obtenir une représentation intégrale de Ψ, comment montrer que les approximations Ψ^k vérifient aussi cette relation ?

Recherches futures.

Je pense que la plupart des utilisations des critères de restriction d'oscillations ont été obtenus dans le chapitre I ainsi que dans [BGJ], qui contient en outre des applications à la convergence au sens de Pettis.

Comme dit plus haut, la notion de convergence pour les multifonctions introduite au chapitre II n'a pas été complètement étudiée. Il reste, je pense, encore du travail à faire. Outre la semi-continuité de la limite, il serait intéressant de voir qu'elles notions sortent de cette convergence lorsqu'on l'applique à des multifonctions particulières, e.g., épigraphes, opérateurs maximaux monotones ... On peut aussi considérer de la même façon une convergence plus faible (ou plus forte) en considérant les limites Ls et Li pour la topologie faible — je pense bien sûr à une "Mosco-convergence" des multifonctions.

En ce qui concerne la convergence des applications vectorielles, il reste certainement beaucoup de travail à faire. En particulier je n'ai pu obtenir, jusqu'à présent de relation entre la convergence des fonctions et leur sous-différentiel ni leur conjuguée (dans le sens de [BPT]).

Finalement, il serait intéressant d'obtenir des applications aux résultats "stochastiques" obtenues dans le chapitre IV. Je pense en particulier à des applications à l'économie mathématique et en particulier à la théorie des équilibres économiques (c.f., e.g., [MC]).

RÉFÉRENCES

[ACV] A. Amrani, C. Castaing & M. Valadier, *Méthodes de troncature appliquées à des problèmes de convergence faible ou forte dans* L^1, Arch. Rational Mech. Anal. **117** (1992), 167–191.

[A] H. Attouch, *Variational Convergence for Functions and Operators*, Pitman, London, 1984.

[AW1] H. Attouch & R. Wets, *A convergence theory for saddle functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 1–41.

[AW2] H. Attouch & R. Wets, *Epigraphical processes*: *laws of large numbers for random lsc functions*, Sém. Anal. Convexe **20** (1990), 13.1–13.29.

[AG] P. Aviles & Y. Giga, *Variational integrals on mappings of bounded variation and their lower semicontinuity*, Arch. Rational Mech. Anal. **115** (1991), 201–255.

[Ba1] E.J. Balder, *A general approach to lower semicontinuity and lower closure in optimal control theory*, SIAM J. Control Optim. **22** (1984), 570–598.

[Ba2] E.J. Balder, *An extension of Prohorov's theorem for transition probabilities with applications to infinite-dimensional lower closure problems*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **XXXIV** (1985), 427–447.

[Ba3] E.J. Balder, *On weak convergence implying strong convergence in* L_1*-spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **33** (1986), 363–368.

[Ba4] E.J. Balder, *On Prohorov's theorem for transition probabilities*, Sém. Anal. Convexe **19** (1989), 9.1–9.11.

[Ba5] E.J. Balder, *From weak to strong* L_1*-convergence by an oscillation restriction criterion of BMO type*, Preprint No. 666 (1991), Dept. of Math., University of Utrecht, The Netherlands.

[BGJ] E.J. Balder, M. Girardi & V. Jalby, *From weak to strong types of* $\mathcal{L}^1_E$*-convergence by the Bocce-criterion*, Preprint No. 826 (1993), Dept. of Math, University of Utrecht, The Netherlands (à paraître dans Studia Math.).

[BS] A. Beck & J.T. Schwartz, *A vector-valued random ergodic theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 1049–1059.

[Be] G. Beer, *Lattice-semicontinuous mappings and their application*, Houston J. Math. **13** (1987), 303–318.

[Br] B. Bernoussi, *Oscillations et compacité en mesure*, Sém. Anal. Convexe **22** (1992), 11.1–11.5.

[Bo] J.M. Borwein, *Continuity and differentiability properties of convex operators*, Proc. London Math. Soc. **44** (1982), 420–444.

[BPT] J.M. Borwein, J.P. Penot & M. Théra, *Conjugate convex operators*, Jour. Math. Anal. Appl. **102** (1984), 399–414.

[BT] J.M. Borwein & M. Théra, *Sandwich theorems for semicontinuous operators*, Canad. Math. Bul. **35** (1992), 463–474.

[Bt1] G. Bouchitté, *Représentation intégrale des fonctionnelles convexes sur un espace de mesures*, Publications AVAMAC n°2 (1986), Université de Perpignan.

[Bt2] G. Bouchitté, *Calcul des variations en cadre non réflexif. Représentation et relaxation de fonctionnelles intégrales sur un espace de mesures. Application en plasticité et homogénisation*, Thèse de Doctorat d'Etat, Perpignan, 1987.

[BV1] G. Bouchitté & M. Valadier, *Integral representation of convex functionals on a space of measures*, J. Funct. Anal. **80** (1988), 398–420.

[BV2] G. Bouchitté & M. Valadier, *Multifonctions s.c.i. et régularisée s.c.i. essentielle*, Congrés franco-québécois d'analyse non-linéaire appliquée, Perpignan, 22-26 juin 1987, Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire **6-suppl.** (1989), 123–149.

[Bk1] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique. Intégration*, Chapitres I-IV, Deuxième édition, Hermann, Paris, 1965.

[Bk2] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique. Intégration*, Chapitre IX, Hermann, Paris, 1969.

[BD1] J.K. Brooks & N. Dinculeanu, *Weak Compactness in space of Bochner integrable functions and applications*, Adv. in Math. **24** (1977), 172–188.

[BD2] J.K. Brooks & N. Dinculeanu, *Conditional expectations and weak and strong compactness in spaces of Bochner integrable functions*, J. Multivariate Anal. **9** (1979), 420–427.

[Bu] G. Buttazzo, *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variation*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1989.

[C1] C. Castaing, *Application d'un théorème de compacité à la désintégration des mesures*, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A **273** (1971), 1056–1059.

[C2] C. Castaing, *Un résultat de compacité lié à la propriété des ensembles Dunford-Pettis dans $L^1_F(\Omega,\mathcal{A},\mu)$*, Sém. Anal. Convexe **9** (1979), 17.1–17.7.

[C3] C. Castaing, *Sur une nouvelle classe d'équation d'évolution dans les espaces de Hilbert*, Sém. Anal. Convexe **13** (1983), 10.1–10.28.

[C4] C. Castaing, *Représentation intégrale des multifonctions séparément σ-additives et séparément continues*, Sém. Anal. Convexe **14** (1984), 18.1–18.39.

[C5] C. Castaing, *Validité du théorème de Reshetnyak dans les espaces hilbertiens*, Sém. Anal. Convexe **17** (1987), 8.1–8.9.

[C6] C. Castaing, *Quelques résultats de convergence dans les inclusions différentielles*, Sém. Anal. Convexe **17** (1987), 12.1–12.37.

[C7] C. Castaing, *Quelques problèmes d'évolution du second ordre*, Sém. Anal. Convexe **18** (1988), 5.1–5.18.

[C8] C. Castaing, *Sur la décomposition de Slaby. Applications aux problèmes de convergences en probabilités. Economie mathématique. Théorie du contrôle. Minimisation*, Sém. Anal. Convexe **19** (1989), 3.1–3.35.

[CC] C. Castaing & P. Clauzure, *Quelques résultats de représentation intégrale et applications à l'espérance conditionnelle des multiapplications et des intégrandes*, Sém. Anal. Convexe **9** (1979), 14.1–14.43.

[CDV] C. Castaing, T.X. Duc Ha & M. Valadier, *Evolution equations governed by the sweeping process*, Set-Valued Anal. **1** (1993), 109–139.

[CE] C. Castaing & F. Ezzaki, *Variational inequalities for integrands martingales and additive random sequences*, Sém. Anal. Convexe **22** (1992), 1.1–1.35.

[CV] C. Castaing & M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math., vol. 580, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[DM] C. Dellacherie & P.A. Meyer, *Probabilités et Potentiel*, Chapitres I–IV, Hermann, Paris, 1978.

[Dt] J. Diestel, *Uniform integrability*: *an introduction*, School on Measure Theory and Real Analysis. Grado (Italy), October 14-25, 1991, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **XXIII** (1991), 41–80.

[DU] J. Diestel & J.J. Uhl, *Vector Measures*, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[Di1] N. Dinculeanu, *Vector Measures*, Pergamon Press, Oxford, 1967.

[Di2] N. Dinculeanu, *Integration on Locally Compact Spaces*, Noordhoff International Publ., Leyden, 1974.

[DSW] S. Dolecki, G. Salinetti & R. Wets, *Convergence of functions*: *Equi-semicontinuity*, Trans. Amer. Math. Soc. **276** (1983), 409–429.

[Ga] A. Gavioli, *Approximation from the exterior of a multifunction and its application in the "sweeping process"*, J. Differential Equations **92** (1991), 373–383.

[GhS] N. Ghoussoub & J.M. Steele, *Vector valued subadditive processes and applications in probability*, Ann. Probab. **8** (1980), 83–95.

[GMS] M. Giaquinta, G. Modica & J. Soucek, *Functionals with linear growth in the calculus of variations.* I, Comment. Math. Univ. Carolin. **20** (1979), 143–156; II **20** (1979), 157–171.

[Gn] E. Giner, *Etudes sur les fonctionnelles intégrales*, Thèse de Doctorat, Université de Pau, 1985.

[Gi1] M. Girardi, *Compactness in L_1, Dunford-Pettis operators, geometry of Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 767–777.

[Gi2] M. Girardi, *Weak vs. strong compactness in L_1: the Bocce criterion*, Studia Math. **98** (1991), 95–97.

[GS] C. Goffman & J. Serrin, *Sublinear functions of measures and variational integrals*, Duke Math. J. **31** (1964), 159–178.

[H] C. Hess, *Epi-convergence of sequences of normal integrands and strong consistency of the maximum likelihood estimator*, Preprint Novembre 1991 (36 pages), Cahier de Mathématiques de la décision n°9121, Université Paris Dauphine.

[HU] F. Hiai & H. Umegaki, *Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions*, J. Multivariate Anal. **7** (1977), 149–182.

[H-J] J. Hoffmann-Jørgensen, *Probability and geometry of Banach spaces*, Functional Analysis, Proceedings, Dubrovnik 1981 (D. Botkovic, H. Kraljevic & S. Kurepa, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 948, Springer–Verlag, Berlin, 1982.

[IT] C. Ionescu Tulcea, *Two theorems concerning the desintegration of measures*, J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 376–380.

[Jb] V. Jalby, *Convergence criterions in L^1_E-spaces*, Preprint (1992), Dépt. de Math., Université Montpellier II.

[Jw] A. Jawhar, *Mesures de transition et applications*, Sém. Anal. Convexe **14** (1984), 13.1–13.62.

[Jo] G.W. Johnson, *The dual of $C(S,F)$*, Math. Ann. **187** (1970), 1–8.

[Ke] J.L. Kelley, *General Topology*, Graduate Texts in Math., vol. 27, Springer-Verlag, Berlin, 1955.

[Kr] U. Krengel, *Ergodic Theorems*, De Gruyter studies in Math., vol. 6, De Gruyter, Berlin, 1985.

[Le1] B. Lemaire, *Convergence in vector optimization*, Conférence aux *Congrès franco-québécois d'analyse non-linéaire appliquée*, Perpignan, France, 22-26 Juin 1987.

[Le2] B. Lemaire, *Approximation in multiobjective optimization*, J. Global Optim. **2** (1992), 117–132.

[Lu] D.T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Math. Systems, vol. 946, Springer–Verlag, Berlin, 1989.

[MC] A. Mas-Colell, *The price equilibrium existence problem in topological vector lattices*, Econometrica **54** (1986), 1039–1053.

[Mi] E. Michael, *Continuous selections*, I, Ann. of Math **63** (1956), 361–382.

[MM1] M.D.P. Monteiro Marques, *Rafle par un convexe semi-continu inférieurement d'intérieur non vide en dimension finie*, Sém. Anal. Convexe **14** (1984), 6.1–6.24.

[MM2] M.D.P. Monteiro Marques, *Rafle par un convexe continu d'intérieur non vide en dimension infinie*, Sém. Anal. Convexe **16** (1986), 4.1–4.11.

[MM3] M.D.P. Monteiro Marques, *Differential inclusions and inelastic shocks*, Birkhäuser, Basel, 1993.

[Mo1] J.J. Moreau, *Rafle par un convexe variable.* I, Sém. Anal. Convexe **1** (1971), 15.1–15.43; II, Sém. Anal. Convexe **2** (1972), 3.1–3.36.

[Mo2] J.J. Moreau, *Sur les mesures différentielles des fonctions vectorielles à variation localement bornée*, Sém. Anal. Convexe **5** (1975), 17.1–17.39.

[Mo3] J.J. Moreau, *Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problêmes d'évolution*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A **282** (1976), 837–840.

[Mo4] J.J. Moreau, *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Differential Equations **26** (1977), 347–374.

[Ne1] J. Neveu, *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*, 2ème édition, Masson & Cie, Paris, 1970.

[Ne2] J. Neveu, *Martingales à Temps Discret*, Masson & Cie, Paris, 1972.

[No1] M.-F. Nouguès (Sainte-Beuve), *Some topological properties of vector measures with bounded variation and its applications*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **CXVI** (1978), 317-379.

[No2] M.-F. Nouguès (Sainte-Beuve), *Mesures vectorielles à variation bornée, et applications à la semi-continuité inférieure d'une fonctionnelle intégrale*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Montpellier II, 1987.

[PT] J.P. Penot & M. Théra, *Semi-continuous mappings in general topology*, Arch. Math. **38** (1982), 158–166.

[P] A.L. Peressini, *Ordered Topological Vector Spaces*, Harper's Series in Modern Mathematics, Harper & Row Publ., New-York, 1967.

[PV] L. Piccinini & M. Valadier, *Uniform integrability and Young measures*, Preprint (1993), Dépt. de Math., Université Montpellier II (à paraître).

[Re] Y.G. Reshetnyak, *Weak convergence of completely additive vector functions on a set*, Sibirsk. Mat. Zh. **9** (1968), 1386–1394 (Russian); English transl., Siberian Math. J. **9** (1968), 1039–1045.

[Ro1] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[Ro2] R.T. Rockafellar, *Integrals which are convex functionals.* II, Pacific J. Math. **39** (1971), 439–469.

[SP] J. Saint-Pierre, *Désintégration d'une mesure non bornée*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **11** (1975), 275–286.

[Sa] A. Salvadori, *On the M-convergence for integral functionals on* L^p_X, Sém. Anal. Convexe **15** (1985), 5.1–5.25.

[Sc] H.H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. 215, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[St] T. Staib, *Necessary optimality conditions for nonsmooth multicriterial optimization problems*, SIAM J. Optim. **2** (1992), 153–171.

[Ta] H. Tanaka, *Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions in convex regions*, Hiroshima Math. J. **9** (1980), 163–177.

[Th1] M. Théra, *Etude des fonctions convexes vectorielles semi-continues*, Thèse, Pau, 1978.

[Th2] M. Théra, *Théorèmes d'interposition pour des applications convexes vectorielles*, Sém. d'Init. Anal. (Choquet, Godefroy, Rogalsky, Saint-Raymond) **29** (1991), 17.01–17.13.

[Tb1] L. Thibault, *Sur les fonctions compactement lipschitziennes et leur applications : programmation mathématique, contrôle optimal, espérance conditionnelle*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Montpellier II, 1980.

[Tb2] L. Thibault, *Espérances conditionnelles d'intégrandes semi continues*, Ann. Inst. H. Poincaré Proba. Statist. **17** (1981), 337–350.

[Tr] A. Truffert, *Représentation intégrale et application à la normalité des intégrandes conditionnelles. Propriété de Fatou-Vitali des fonctions intégrables et application à l'épiconvergence des fonctionnelles intégrales*, Thèse de 3ème cycle, Université de Perpignan, 1983.

[V1] M. Valadier, *Comparaison de trois théorèmes de désintégration*, Sém. Anal. Convexe **2** (1972), 10.1–10.21.

[V2] M. Valadier, *Désintégration d'une mesure sur un produit*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A **276** (1973), 33–35.

[V3] M. Valadier, *Une propriété de l'ensemble des sélections à variation bornée d'une multi-application à rétraction bornée*, Sém. Anal. Convexe **7** (1977), 13.1–13.7.

[V4] M. Valadier, *Approximation lipschitzienne par l'intérieur d'une multifonction sci*, Sém. Anal. Convexe **17** (1987), 11.1–11.12.

[V5] M. Valadier, *Lipschitz approximation of the sweeping* (*or Moreau*) *process*, J. Differential Equations **88** (1990), 248–264.

[V6] M. Valadier, *Young measures*, Methods of Nonconvex Analysis (A. Cellina, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 1446, Springer-Verlag, Berlin, 1990, pp. 152–188.

[V7] M. Valadier, *Applications des mesures de Young aux suites uniformément intégrables dans un Banach séparable*, Sém. Anal. Convexe **20** (1990), 3.1–3.14.

[V8] M. Valadier, *Oscillations et compacité forte dans L^1*, Sém. Anal. Convexe **21** (1991), 7.1– 7.10.

[V9] M. Valadier, *A course on Young measures*, Workshop on Measure Theory and Real Analysis, Grado (Italy), September 19 - October 2, 1993 (à paraître dans Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste).