

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2025-2026

Session 1

Semestre 4

Licence Economie-Gestion – 2^e année

Matière : Statistiques et probabilités

Durée : 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (20 min, 4 points)

Présenter le principe d'un test statistique. En particulier, vous préciserez

- 1) le choix des hypothèses ;
- 2) les risques liés à la prise de décision ;
- 3) la puissance d'un test.

Exercice I (20 min, 4 points)

Dans un article publié le 9 mars 2026 sur le site d'information franceinfo. fr, on peut lire :

L'autre particularité des sondages pour les [élections] municipales est la taille plus faible des échantillons par rapport aux enquêtes d'opinion sur la présidentielle, où le nombre de personnes interrogées dépasse très souvent les 1 000 personnes. « Même si l'échantillon est plus petit, s'il est bien construit et bien représentatif de la population locale, [et] prend en compte qui va aller voter, [il peut permettre d'obtenir] un bon aperçu de la situation électorale », tient à préciser Mathieu Gallard [Directeur d'études à l'institut Ipsos-BVA]. Pourtant, « plus l'échantillon est faible, plus la marge d'erreur est grosse », explique Stéphane Hoynck [Secrétaire général de la commission des sondages].

Par exemple, pour un échantillon de 500 personnes interrogées, avec un candidat mesuré à 10 % d'intentions de vote (soit le seuil nécessaire pour se qualifier), la marge d'erreur est de 2,7 points. Le pourcentage réel est donc compris entre 7,3 % et 12,7 %, contre une fourchette de 8,2 % à 11,8 % pour 1 000 personnes interrogées. De la même manière, l'ordre d'arrivée de deux candidats peut être modifié avec cette marge d'erreur importante, ce qui transformerait le commentaire médiatique dans la course à l'hôtel de ville.

- 1) Commenter l'extrait ci-dessus, en précisant le cadre statistique et en détaillant les calculs utilisés.
- 2) Comment interprétez-vous la dernière phrase (concernant l'ordre d'arrivée) ?
- 3) Que pensez-vous du premier paragraphe, concernant la représentativité de l'échantillon ?

Problème

Chaque année, l'observatoire de l'immobilier de la CCI Limoges - Haute-Vienne publie une synthèse du marché de l'immobilier en Haute-Vienne. Ce problème est librement inspiré de l'édition de mars 2025 (<https://www.limoges.cci.fr/immobilier-en-haute-vienne>)

Au premier trimestre 2026, une enquête portant sur les loyers (hors droit au bail) des locaux commerciaux exprimés en € HT par m² et par an, a été menée sur un échantillon de locaux commerciaux de la ville de Limoges (hors emplacement n°1* et hors zones d'activités commerciales).

*Locaux situés en centre-ville, au cœur des axes marchands et bénéficiant d'un fort trafic de chalands.

Partie I (25 min, 3.5 points)

Les résultats de cette enquête sont disponibles dans la sortie **jamovi** ci-dessous :

Descriptives								Shapiro-Wilk	
	N	Mean	Median	SD	Variance	Minimum	Maximum	W	p
Loyer	51	141.73	146.00	25.83	667.08	78.00	185.00	0.97	.279

- 1) Précisez le modèle statistique, paramètres, estimateurs avant de commenter la sortie ci-dessus.
- 2) Construire un intervalle de confiance à 90 % pour l'écart-type du loyer.

Partie II (30 min, 5 points)

Dans l'édition de 2025 (basé sur les données de 2024), l'observatoire estimait à 134 € HT par m² et par an le loyer d'un local commercial à Limoges (hors emplacement n°1 et hors zones d'activités commerciales). Les données collectées au premier trimestre 2026 démontrent-elles une augmentation du loyer moyen ?

- 1) Poser clairement les hypothèses en les justifiant.
- 2) Effectuer le test correspondant en prenant un risque de 5 % et conclure clairement.
- 3) Calculer la probabilité critique associée au test et commenter sa valeur.
- 4) Commenter la sortie **Stata** suivante :

```

Stata. ttest Loyer == 134

One-sample t test
-----
Variable |      Obs      Mean   Std. err.   Std. dev.   [95% conf. interval]
-----+-----
Loyer |         51   141.7255   3.616637   25.82795   134.4613   148.9897
-----+-----
      mean = mean(Loyer)                                t =      2.1361
H0: mean = 134                                         Degrees of freedom =      50

      Ha: mean < 134          Ha: mean != 134          Ha: mean > 134
Pr(T < t) = 0.9812          Pr(|T| > |t|) = 0.0376          Pr(T > t) = 0.0188
    
```

Partie III (25 min, 3.5 points)

L'étude précédente est complétée par les données d'un second échantillon de locaux commerciaux situés en zone d'activités commerciales de l'unité urbaine de Limoges. Les résultats sur ces deux échantillons sont disponibles dans la sortie **jamovi** suivante :

Descriptives								
	Zone	N	Mean	Median	SD	Variance	Minimum	Maximum
Loyers	Limoges (Ville)	51	141.73	146.00	25.83	667.08	78.00	185.00
	Zones commerciales	30	132.67	130.00	21.39	457.40	87.00	172.00

- 1) Préciser le modèle statistique puis commenter les résultats ci-dessus.
- 2) En utilisant les sorties **jamovi** suivantes et *en expliquant les procédures statistiques* (mais sans refaire les calculs), peut-on affirmer que le loyer moyen des zones d'activités commerciales est inférieur à celui de la ville ?

Homogeneity of Variances Tests					Independent Samples T-Test			
		F	df	df2	Statistic	df	p	
Loyers	Levene's	1.73	1	79	Student's t	1.62	79.00	.109
	Variance ratio	1.46	50	29	Welch's t	1.70	70.15	.093

Note. $H_a: \mu_{\text{Limoges (Ville)}} \neq \mu_{\text{Zones commerciales}}$

- 3) Êtes-vous sûr de votre conclusion ? Sinon, comment l'améliorer ?

Récapitulatif des lois discrètes

Loi	Notation	Support	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(1, p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$	$P(X = 0) = q \quad P(X = 1) = p$	$E(X) = p$	$\text{Var}(X) = pq$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq$
Hypergéométrique	$\mathcal{H}(N, n, p)$	$X(\Omega) \subset \{0, \dots, n\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	$P(X = k) = pq^{k-1}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$
Pascal	$\text{Pascal}(r, p)$	$X(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$E(X) = \frac{r}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$	$\text{Var}(X) = \lambda$

$$p \in [0, 1] \quad q = 1 - p \quad n, N, r \in \mathbb{N}^* \quad \lambda > 0$$

Récapitulatif des lois continues

Loi	Notation	Support	Loi/Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathcal{U}(a, b)$	$X(\Omega) = [a, b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$ $\text{Exp}(\lambda)$	$X(\Omega) = [0, +\infty[$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$X(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$E(X) = \mu$	$\text{Var}(X) = \sigma^2$
Normale standard (Z)	$\mathcal{N}(0, 1)$	$Z(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$	$E(Z) = 0$	$\text{Var}(Z) = 1$
Khi-deux (K^2)	$\chi^2(n)$	$K^2(\Omega) = [0, +\infty[$	$K^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ où $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ind.	$E(K^2) = n$	$\text{Var}(K^2) = 2n$
Student (T)	$St(n)$	$T(\Omega) = \mathbb{R}$	$T = \frac{Z}{\sqrt{K^2/n}}$ où $\begin{cases} Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ K^2 \sim \chi^2(n) \end{cases}$ ind.	$E(T) = 0$	$\text{Var}(T) = \frac{n}{n-2}$
Fisher (F)	$F(n_1, n_2)$	$F(\Omega) = [0, +\infty[$	$F = \frac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2}$ où $\begin{cases} K_1^2 \sim \chi^2(n_1) \\ K_2^2 \sim \chi^2(n_2) \end{cases}$ ind.	$E(F) = \frac{n_2}{n_2-2}$	$\text{Var}(F) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \quad \lambda > 0 \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \sigma > 0 \quad n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$$

Fonction de répartition de la loi normale standard

$$P(\mathcal{N}(0, 1) \leq z)$$

Exemple : $P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 1.33) = 0.9082$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Quantiles de la loi de Student

$$P(St(n) \leq t_\alpha) = \alpha$$

Exemple : $P(St(11) \leq 2.201) = 0.975$

$n \backslash \alpha$	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3	636.6
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.33	31.60
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21	12.92
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	0.126	0.255	0.388	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80	0.126	0.254	0.387	0.526	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
90	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
110	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.659	1.982	2.361	2.621	3.166	3.381
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
130	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.041	1.288	1.657	1.978	2.355	2.614	3.154	3.367
140	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.040	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.361
150	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.040	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609	3.145	3.357
200	0.126	0.254	0.386	0.525	0.676	0.843	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340
300	0.126	0.254	0.386	0.525	0.675	0.843	1.038	1.284	1.650	1.968	2.339	2.592	3.118	3.323
500	0.126	0.253	0.386	0.525	0.675	0.842	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107	3.310
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Quantiles de la loi du Khi-deux

$$P(\chi^2(n) \leq k_\alpha^2) = \alpha$$

Exemple : $P(\chi^2(15) \leq 22.31) = 0.90$

$n \backslash \alpha$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25	0.4	0.5	0.6	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.275	0.455	0.708	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.022	1.386	1.833	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	1.869	2.366	2.946	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	2.753	3.357	4.045	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	3.655	4.351	5.132	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	4.570	5.348	6.211	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	5.493	6.346	7.283	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	6.423	7.344	8.351	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	7.357	8.343	9.414	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	8.295	9.342	10.47	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	9.237	10.34	11.53	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	10.18	11.34	12.58	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	11.13	12.34	13.64	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	12.08	13.34	14.69	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	13.03	14.34	15.73	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	13.98	15.34	16.78	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	14.94	16.34	17.82	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	15.89	17.34	18.87	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	16.85	18.34	19.91	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	17.81	19.34	20.95	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	18.77	20.34	21.99	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	19.73	21.34	23.03	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	20.69	22.34	24.07	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	21.65	23.34	25.11	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	22.62	24.34	26.14	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	23.58	25.34	27.18	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	24.54	26.34	28.21	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	25.51	27.34	29.25	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	26.48	28.34	30.28	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	27.44	29.34	31.32	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	37.13	39.34	41.62	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	46.86	49.33	51.89	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	56.62	59.33	62.13	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	66.40	69.33	72.36	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	76.19	79.33	82.57	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	85.99	89.33	92.76	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	95.81	99.33	102.9	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
110	75.55	78.46	82.87	86.79	91.47	99.67	105.6	109.3	113.1	119.6	129.4	135.5	140.9	147.4	151.9
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	109.2	115.5	119.3	123.3	130.1	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6
130	92.22	95.45	100.3	104.7	109.8	118.8	125.3	129.3	133.4	140.5	151.0	157.6	163.5	170.4	175.3
140	100.7	104.0	109.1	113.7	119.0	128.4	135.1	139.3	143.6	150.9	161.8	168.6	174.6	181.8	186.8
150	109.1	112.7	118.0	122.7	128.3	138.0	145.0	149.3	153.8	161.3	172.6	179.6	185.8	193.2	198.4
200	152.2	156.4	162.7	168.3	174.8	186.2	194.3	199.3	204.4	213.1	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3
250	196.2	200.9	208.1	214.4	221.8	234.6	243.7	249.3	255.0	264.7	279.1	287.9	295.7	304.9	311.3
300	240.7	246.0	253.9	260.9	269.1	283.1	293.2	299.3	305.6	316.1	331.8	341.4	349.9	359.9	366.8
400	330.9	337.2	346.5	354.6	364.2	380.6	392.2	399.3	406.5	418.7	436.6	447.6	457.3	468.7	476.6
500	422.3	429.4	439.9	449.1	459.9	478.3	491.4	499.3	507.4	521.0	540.9	553.1	563.9	576.5	585.2