Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

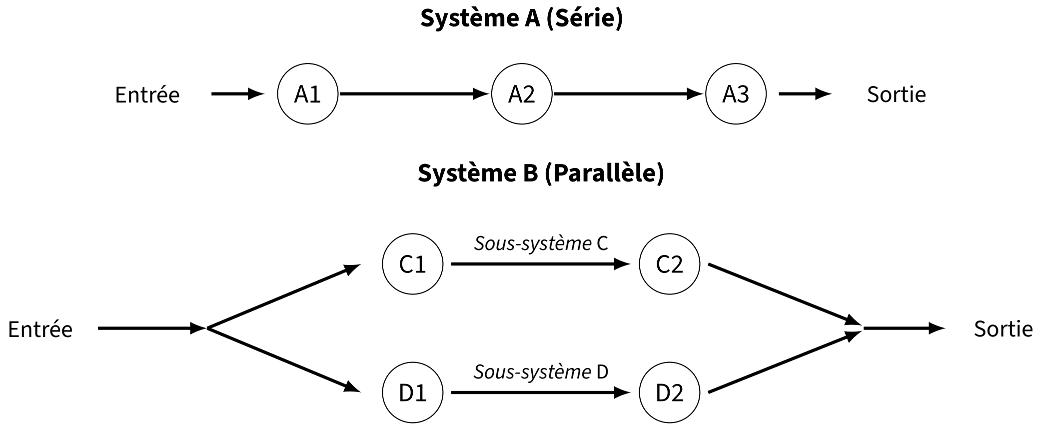
ANNÉE UNIVERSITAIRE 2025-2026

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Statistiques et probabilités – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 4 points)
On considère les deux systèmes présentés dans le diagramme ci-dessous :



1) Le système A fonctionne correctement seulement si les trois composants (A1, A2 et A3) fonctionnent. (Les trois composants sont dits fonctionner *en série*.) Les probabilités de panne des 3 composants (A1, A2 et A3) sont 0.12, 0.09 and 0.11 respectivement. On suppose que les composants fonctionnent indépendamment les uns des autres.

a) On note A_1 l'événement « le composant $A1$ » fonctionne. De même pour A_2 et A_3. D'après l'énoncé, on a

$$P(A_1) = 1 - 0.12 = 0.88 \qquad P(A_2) = 1 - 0.09 = 0.91 \qquad P(A_3) = 1 - 0.11 = 0.89$$

Le système A fonctionne correctement si $A1$ et $A2$ et $A3$ fonctionnent. Les composants fonctionnant indépendamment, on peut supposer les événements A_1, A_2 et A_3 indépendants. On a donc

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) = 0.88 \times 0.91 \times 0.89 = 0.7127$$

b) La probabilité qu'au moins un des composants soit défaillant (et que donc le système ne fonctionne pas) est donc $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7127 = 0.2873$.

2) Le système B est composé de deux sous-systèmes (C et D) dit fonctionner *en parallèle*. Chaque sous-système a deux composants qui fonctionnent en série (C1 et C2, D1 et D2). Le système B fonctionne correctement tant qu'au moins un des sous-systèmes (C ou D) fonctionnent correctement. La probabilité de panne de chaque composant du système est de 0.10. À nouveau, on suppose que les composants fonctionnent indépendamment.

a) Avec des notations similaires à la question précédente, on a $P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = P(C_4) = 1 - 0.10 = 0.90$.
En utilisant le résultat de la question précédente, la probabilité que le système C fonctionne est

$$P(C) = P(C_1) \times P(C_2) = 0.90 \times 0.90 = 0.81$$

De même, $P(D) = 0.81$.

b) Le système B fonctionne si le système C ou D fonctionne. D'où

$$\begin{aligned} P(B) &= P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = P(C) + P(D) - P(C) \times P(D) \\ &= 0.81 + 0.81 - 0.81 \times 0.81 = 0.9636 \end{aligned}$$

Exercice II (30 min, 4 points)
On lance deux dés et on note la somme des deux faces.

1) On considère les deux dés « physiques », donc ordonnés. L'univers des possibles est $\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 6]\!]$ et $\operatorname{Card} \Omega = 36$. On suppose l'équi-probabilité des résultats (dés non truqués).

Soit X la variable aléatoire définie sur Ω donnant la somme de deux dés. On $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$. Finalement, on a

$$P(X = 2) = P((1, 1)) = 1/36$$

$$P(X = 3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = 2/36$$

$$P(X = 4) = P(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = 3/36$$

$$P(X = 5) = P(\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}) = 4/36$$

$$P(X = 6) = P(\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}) = 5/36$$

$$P(X = 7) = P(\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}) = 6/36$$

$$P(X = 8) = P(\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}) = 5/36$$

$$P(X = 9) = P(\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}) = 4/36$$

$$P(X = 10) = P(\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}) = 3/36$$

$$P(X = 11) = P(\{(5, 6), (6, 5)\}) = 2/36$$

$$P(X = 12) = P((6, 6)) = 1/36$$

D'où la loi de X :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

2) L'espérance et la variance de X sont :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \frac{1}{36}(2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + \cdots + 12 \times 1) = 7 \\
\mathrm{E}(X^2) &= \frac{1}{36}(2^2 \times 1 + 3^2 \times 2 + 4^2 \times 3 + \cdots + 12^2 \times 1) \approx 54.83 \\
\mathrm{Var}(X) &= 54.83 - 7^2 = 5.83
\end{aligned}$$

3) La probabilité que la somme soit égale à 9 ou plus est

$$P(X \geqslant 9) = P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) = \frac{4 + 3 + 2 + 1}{36} = \frac{5}{18} = 0.2778$$

Exercice III (20 min, 4 points)
Une entreprise reçoit des composants d'un fournisseur sous forme de lots importants, pour être utilisé dans ses chaînes de production. La production ne sera pas rentable si un lot contient 10 % ou plus de composants défectueux. L'entreprise vérifie la qualité de chaque lot en prélevant un échantillon de 15 composants et en rejetant le lot complet si 2 composants défectueux ou plus sont trouvés.

On prélève 15 composants dans un lot important. On peut donc supposer que le prélèvement est fait « avec répétitions ». Soit p la proportion de composants défectueux dans un lot. Le nombre X de composants défectueux de l'échantillon suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(15, p)$.

1) Si un lot contient 10 % de composants défectueux, alors $X \sim \mathcal{B}(15, 0.10)$. La probabilité qu'il soit accepté est donc

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{15}{0} 0.90^{15} + \binom{15}{1} 0.90^{14} \times 0.10 \approx 0.2059 + 0.3451 = 0.549$$

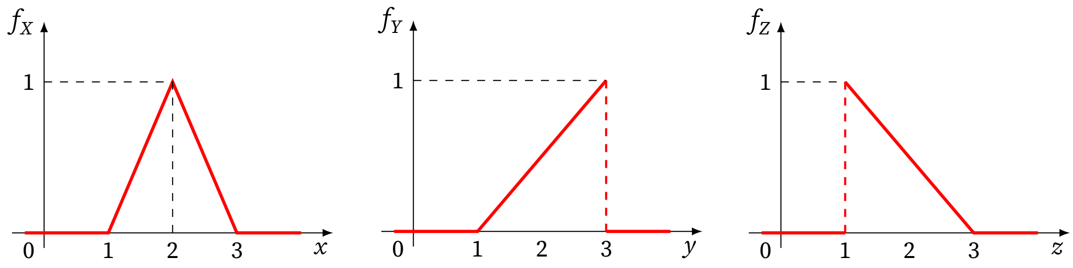
2) La procédure mise en place consiste à rejeter un lot si l'échantillon contient plus de 10 % de composants défectueux. Avec un échantillon de 15, cela représente 1.5 composants défectueux. D'où la règle de rejeter à partir de 2 (soit 2/15 = 13.33 %). Pour réduire la probabilité d'accepter par erreur un lot défectueux, il faudrait donc augmenter la taille de l'échantillon à 19. On rejetterait alors un lot si l'échantillon contient 2 ou plus composants défectueux, soit 2/19 = 10.53 %.

3) Si le fournisseur produit un lot avec 3 % de composants défectueux, alors X suit une loi $\mathcal{B}(15, 0.03)$. La probabilité que l'entreprise le rejette est

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{15}{0} 0.97^{15} + \binom{1}{15} 0.97^{14} \times 0.03 \approx 1 - 0.6332 - 0.2937 = 0.0729$$

4) L'hypothèse « lots importants » permet de supposer que les tirages sont effectués avec répétitions, c'est-à-dire, d'approcher la loi hypergéométrique par la loi binomiale.

Exercice IV (20 min, 4 points)
On considère trois variables aléatoires continues X, Y et Z dont les densités de probabilité sont représentées ci-dessous :



1) Les trois graphes correspondent à des fonctions positives (graphes au-dessus de l'axe des x) et continues (sauf en 3 pour f_Y et en 1 pour f_Z). De plus, l'aire comprise entre le graphe de la fonction et l'axe des x correspond à l'aire d'un triange de hauteur 1 et de base 2, donc

$$\int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

Il s'agit donc bien de trois fonctions de densité.

2) En raison de la symétrie de son graphe par rapport à la droite $x = 2$, la variable X a pour espérance $\mathrm{E}(X) = 2$, qui correspond aussi à sa médiane.
La variable Y prend des valeurs supérieures à 2 avec une probabilité plus forte que les valeurs inférieures à 2. Son espérance $\mathrm{E}(Y)$ sera donc supérieure à 2.
Le raisonnement est inversé pour Z, d'où $\mathrm{E}(Z) < 2$.
En résumé, on a $\mathrm{E}(Z) < \mathrm{E}(X) = 2 < \mathrm{E}(Y)$.

3) La densité de Y étant la symétrique de celle de Z, on en déduit que $\sigma_Y = \sigma_Z$. Par contre, les valeurs prises par X étant mieux réparties autour de la moyenne, on peut penser que $\sigma_X < \sigma_Y = \sigma_Z$.

Exercice V (20 min, 4 points)
Le rendement d'une exploitation agricole est mesuré par la quantité (en €) de récolte produite par acre (1 acre = 4047 m^2). Les prévisionnistes indiquent que le rendement en coton d'un agriculteur particulier pour l'été prochain peut être caractérisé par une distribution normale avec une moyenne de 1500 € et un écart type de 250 €. On suppose que le coût d'exploitation d'un acre de coton est de 1600 €.

1) D'après l'énoncé, le rendement X suit une loi normale $\mathcal{N}(1500, 250^2)$. La probabilité que l'agriculteur perde de l'argent l'été prochain est donc

$$P(X < 1600) = P\left(\frac{X - 1500}{250} < \frac{1600 - 1500}{250}\right) = P(Z < 0.4) = 0.6554 = 65.54\ \%$$

2) La probabilité que le profit par acre soit supérieur à 50 € est

$$P(X > 1600 + 50) = P\left(\frac{X - 1500}{250} > \frac{1650 - 1500}{250}\right) = P(Z > 0.6) = 1 - 0.7257 = 27.43\ \%$$

3) Soit C le coût d'exploitation (par acre) après réduction. On souhaite donc que

$$P(X \geqslant C) = 0.75 \iff P\left(\frac{X - 1500}{250} \geqslant \frac{C - 1500}{250}\right) = 0.75 \iff P\left(Z < \frac{C - 1500}{250}\right) = 0.25$$
$$\iff \frac{C - 1500}{250} = z_{0.25} = -0.675 \iff C = 1500 - 0.675 \times 250 = 1331.25$$

L'agriculteur doit donc réduire ses coûts d'exploitation (par acre) de $1600 - 1331.25 = 268.75$ €