

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025

Session 1

Semestre 4

Licence Économie-Gestion – 2^e année

Matière : Statistiques et probabilités

Durée : 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Problème

Depuis le 1^{er} janvier 2019, la distribution de l'eau potable aux usagers de 9 communes (dont Limoges) de l'agglomération de Limoges est assurée en régie par la communauté urbaine de Limoges-Métropole.

En 2023, le volume d'eau facturé en vente directe à l'abonné s'élevait à 8 103 329 m³ pour 166 395 habitants desservis, soit environ 133 litres par jour et par habitant, avec un écart-type de 40 litres.

Source : *Limoges-Métropole, Rapport annuel 2023 sur le prix et la qualité du service public de l'eau, publié le 15 juillet 2024.*
www.limoges-metropole.fr

En attendant la publication des chiffres officiels de 2024, une association souhaite estimer la consommation moyenne pour 2024. Pour cela, elle a relevé la consommation annuelle pour 2024 de 151 foyers de l'agglomération choisis au hasard.

Partie I (15 min, 3 points)

Les données (consommation en litres par jour et par habitant) collectées sur l'échantillon sont résumées dans la sortie jamovi suivante :

Descriptives										Shapiro-Wilk	
	N	Missing	Mean	SE	Median	SD	Minimum	Maximum		W	p
Conso	151	0	139.0	3.406	139.0	41.86	26.00	256.0		0.9963	0.973

- 1) Modéliser statistiquement la problématique (population, variable, paramètres, échantillon).
- 2) Commenter en détail la sortie jamovi ci-dessus.
- 3) Donner un intervalle de confiance à 90 % pour la consommation moyenne pour l'année 2024.

Partie II (25 min, 4 points)

On souhaite vérifier que les variations de consommation n'ont pas augmenté par rapport à 2023.

- 1) Poser, en justifiant, clairement les hypothèses du test.
- 2) Construire un test à 5 % permettant de vérifier l'hypothèse ci-dessus.
- 3) Quelle est votre conclusion? Quel risque prenez-vous?
- 4) Commenter la sortie R ci-contre.

```
R> VarTest(data$Conso, sigma.squared = 40**2)
```

One Sample Chi-Square test on variance

```
data: data$Conso
X-squared = 164.25, df = 150, p-value = 0.3623
alternative hypothesis: true variance is not equal to 1600
95 percent confidence interval:
 1414.431 2227.427
sample estimates:
variance of x
 1752.013
```

Partie III (30 min, 5 points)

On souhaite à présent tester si la consommation moyenne a augmenté en 2024 (par rapport à 2023).

- 1) Poser clairement les hypothèses du test puis effectuer le test en prenant un risque de 5 %.
- 2) Quelle est votre conclusion ? Quel risque prenez-vous ?
- 3) Calculer et interpréter la probabilité critique associée à ce test.
- 4) Commenter la sortie STATA suivante :

Stata. ttest Conso == 133						
One-sample t test						
Variable	Obs	Mean	Std. err.	Std. dev.	[95% conf. interval]	
Conso	151	139.0265	3.406278	41.85705	132.296	145.757
mean = mean(Conso)				t =	1.7692	
H0: mean = 133				Degrees of freedom =	150	
Ha: mean < 133		Ha: mean != 133		Ha: mean > 133		
Pr(T < t) = 0.9606		Pr(T > t) = 0.0789		Pr(T > t) = 0.0394		

Partie IV (25 min, 4 points)

Les ménages sondés dans l'enquête précédente étaient répartis sur l'ensemble du territoire de Limoges-Métropole (Limoges et communes limitrophes). On souhaite comparer la consommation moyenne des habitants de Limoges à ceux des autres communes.

La sortie SAS suivante précise les consommations d'eau des habitants de Limoges et celles des habitants des autres communes de l'échantillon.

Variable: Conso							
Commune	Method	N	Mean	Std Dev	Std Err	Minimum	Maximum
Limoges		120	142.9	41.2925	3.7695	58.0000	256.0
Autres communes		31	124.2	41.3737	7.4309	26.0000	191.0
Diff (1-2)	Pooled		18.6242	41.3088	8.3226		
Diff (1-2)	Satterthwaite		18.6242		8.3323		

- 1) Après avoir précisé le modèle statistique, commenter en détail la sortie précédente.
- 2) Les sorties SAS suivantes permettent-elles d'affirmer que la consommation moyenne des habitants de Limoges est supérieure à celles des autres communes ? (Précisez la méthode et les hypothèses avant de commenter les sorties.)

Equality of Variances				
Method	Num DF	Den DF	F Value	Pr > F
Folded F	30	119	1.00	0.9432

Method	Variances	DF	t Value	Pr > t
Pooled	Equal	149	2.24	0.0267
Satterthwaite	Unequal	46.647	2.24	0.0302

Partie V (25 min, 4 points)

Dans le cadre de la certification Qualité ISO 9001, Limoges-Métropole a réalisé en 2023 une enquête pour évaluer ses services « cycle de l'eau ». Une des questions de cette enquête portait sur l'intérêt des usagers (particuliers et professionnels) concernant l'installation d'un compteur (d'eau) connecté permettant, en particulier, d'alerter en cas de fuite d'eau. Sur les 753 réponses, 381 sont favorables (à l'installation d'un compteur connecté), 369 sont défavorables et 3 sont sans avis.

- 1) Décrire le modèle statistique modélisant cette enquête.
- 2) Donner un intervalle de confiance à 95 % pour la part de personnes favorables au compteur connecté.
- 3) Cette enquête permet-elle d'affirmer que plus de la moitié des usagers est favorable à l'installation d'un compteur connecté ?

Récapitulatif des lois discrètes

Loi	Notation	Support	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(1, p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$	$P(X = 0) = q \quad P(X = 1) = p$	$E(X) = p$	$\text{Var}(X) = pq$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq$
Hypergéométrique	$\mathcal{H}(N, n, p)$	$X(\Omega) \subset \{0, \dots, n\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	$P(X = k) = pq^{k-1}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$
Pascal	$\text{Pascal}(r, p)$	$X(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$E(X) = \frac{r}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$	$\text{Var}(X) = \lambda$

$$p \in [0, 1] \quad q = 1 - p \quad n, N, r \in \mathbb{N}^* \quad \lambda > 0$$

Récapitulatif des lois continues

Loi	Notation	Support	Loi/Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathcal{U}(a, b)$	$X(\Omega) = [a, b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{si } x \in [a, b]$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$ $\text{Exp}(\lambda)$	$X(\Omega) = [0, +\infty[$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{si } x \geq 0$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$X(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$E(X) = \mu$	$\text{Var}(X) = \sigma^2$
Normale standard (Z)	$\mathcal{N}(0, 1)$	$Z(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$	$E(Z) = 0$	$\text{Var}(Z) = 1$
Khi-deux (K^2)	$\chi^2(n)$	$K^2(\Omega) = [0, +\infty[$	$K^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \quad \text{où } Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ ind.}$	$E(K^2) = n$	$\text{Var}(K^2) = 2n$
Student (T)	$St(n)$	$T(\Omega) = \mathbb{R}$	$T = \frac{Z}{\sqrt{K^2/n}} \quad \text{où } \begin{cases} Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ K^2 \sim \chi^2(n) \end{cases} \text{ ind.}$	$E(T) = 0$	$\text{Var}(T) = \frac{n}{n-2}$
Fisher (F)	$F(n_1, n_2)$	$F(\Omega) = [0, +\infty[$	$F = \frac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2} \quad \text{où } \begin{cases} K_1^2 \sim \chi^2(n_1) \\ K_2^2 \sim \chi^2(n_2) \end{cases} \text{ ind.}$	$E(F) = \frac{n_2}{n_2-2}$	$\text{Var}(F) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \quad \lambda > 0 \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \sigma > 0 \quad n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$$

Fonction de répartition de la loi normale standard

$$P(\mathcal{N}(0, 1) \leq z)$$

$$\text{Exemple : } P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 1.33) = 0.9082$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Quantiles de la loi de Student

$$P(St(n) \leq t_\alpha) = \alpha$$

$$\text{Exemple : } P(St(11) \leq 2.201) = 0.975$$

$n \backslash \alpha$	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3	636.6
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.33	31.60
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21	12.92
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	0.126	0.255	0.388	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80	0.126	0.254	0.387	0.526	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
90	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
110	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.659	1.982	2.361	2.621	3.166	3.381
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
130	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.041	1.288	1.657	1.978	2.355	2.614	3.154	3.367
140	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.040	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.361
150	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.040	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609	3.145	3.357
200	0.126	0.254	0.386	0.525	0.676	0.843	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340
300	0.126	0.254	0.386	0.525	0.675	0.843	1.038	1.284	1.650	1.968	2.339	2.592	3.118	3.323
500	0.126	0.253	0.386	0.525	0.675	0.842	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107	3.310
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Quantiles de la loi du Khi-deux

$$P(\chi^2(n) \leq k_{\alpha}^2) = \alpha$$

$$\text{Exemple : } P(\chi^2(15) \leq 22.31) = 0.90$$

$n \backslash \alpha$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25	0.4	0.5	0.6	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.275	0.455	0.708	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.022	1.386	1.833	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	1.869	2.366	2.946	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	2.753	3.357	4.045	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	3.655	4.351	5.132	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	4.570	5.348	6.211	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	5.493	6.346	7.283	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	6.423	7.344	8.351	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	7.357	8.343	9.414	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	8.295	9.342	10.47	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	9.237	10.34	11.53	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	10.18	11.34	12.58	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	11.13	12.34	13.64	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	12.08	13.34	14.69	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	13.03	14.34	15.73	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	13.98	15.34	16.78	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	14.94	16.34	17.82	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	15.89	17.34	18.87	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	16.85	18.34	19.91	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	17.81	19.34	20.95	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	18.77	20.34	21.99	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	19.73	21.34	23.03	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	20.69	22.34	24.07	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	21.65	23.34	25.11	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	22.62	24.34	26.14	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	23.58	25.34	27.18	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	24.54	26.34	28.21	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	25.51	27.34	29.25	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	26.48	28.34	30.28	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	27.44	29.34	31.32	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	37.13	39.34	41.62	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	46.86	49.33	51.89	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	56.62	59.33	62.13	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	66.40	69.33	72.36	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	76.19	79.33	82.57	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	85.99	89.33	92.76	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	95.81	99.33	102.9	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
110	75.55	78.46	82.87	86.79	91.47	99.67	105.6	109.3	113.1	119.6	129.4	135.5	140.9	147.4	151.9
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	109.2	115.5	119.3	123.3	130.1	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6
130	92.22	95.45	100.3	104.7	109.8	118.8	125.3	129.3	133.4	140.5	151.0	157.6	163.5	170.4	175.3
140	100.7	104.0	109.1	113.7	119.0	128.4	135.1	139.3	143.6	150.9	161.8	168.6	174.6	181.8	186.8
150	109.1	112.7	118.0	122.7	128.3	138.0	145.0	149.3	153.8	161.3	172.6	179.6	185.8	193.2	198.4
200	152.2	156.4	162.7	168.3	174.8	186.2	194.3	199.3	204.4	213.1	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3
250	196.2	200.9	208.1	214.4	221.8	234.6	243.7	249.3	255.0	264.7	279.1	287.9	295.7	304.9	311.3
300	240.7	246.0	253.9	260.9	269.1	283.1	293.2	299.3	305.6	316.1	331.8	341.4	349.9	359.9	366.8
400	330.9	337.2	346.5	354.6	364.2	380.6	392.2	399.3	406.5	418.7	436.6	447.6	457.3	468.7	476.6
500	422.3	429.4	439.9	449.1	459.9	478.3	491.4	499.3	507.4	521.0	540.9	553.1	563.9	576.5	585.2