Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Statistiques et probabilités – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (20 min, 4 points)
Un fabricant de meubles suédois indique que 55 % des tables et 30 % des chaises produites sont fournies au détaillant A. Sur le total des unités produites, 65 % sont des chaises et le reste sont des tables.

1) On désigne par T et C les tables et chaises produites et par A les produits fournis au détaillant A. D'après l'énoncé, on a

$$P(A \mid T) = 0.55 \qquad P(A \mid C) = 0.30 \qquad P(C) = 0.65 \qquad P(T) = 0.35$$

La probabilité qu'une unité choisie au hasard soit une chaise et soit fournie au détaillant A est donc

$$P(C \cap A) = P(A \mid C) \times P(C) = 0.30 \times 0.65 = 0.195$$

2) D'après la formule des probabilités totales, la probabilité qu'une unité choisie au hasard soit fournie au détaillant A est

$$P(A) = P(A \mid T) \times P(T) + P(A \mid C) \times P(C) = 0.55 \times 0.35 + 0.30 \times 0.65 = 0.3875$$

3) La probabilité qu'une unité choisie au hasard soit une chaise ou soit fournie au détaillant A (ou les deux) est

$$P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) = 0.65 + 0.3875 - 0.195 = 0.8425$$

4) Les événements « chaise » et « fourniture au détaillant A » ne sont pas statistiquement indépendants car

$$P(A \mid C) = 0.30 \neq 0.3875 = P(A)$$

Exercice II (20 min, 3 points)
Un entrepreneur s'intéresse au coût total d'un projet pour lequel il a l'intention de faire une offre. Il estime que les matériaux coûteront 25 000 € et que sa main-d'œuvre sera de 900 € par jour. Si le projet prend x jours à terminer, le coût total de la main-d'œuvre sera de $900x$ euros, et le coût total du projet (en euros) sera le suivant : $C = 25\,000 + 900x$.

1) Pour simplifier les valeurs, on exprime les montants en milliers d'euros (k€). On a donc $C = 25 + 0.9 \times x$. La loi de probabilité du coût total C est donc donnée par le tableau :

Durée (x) du projet (en jours)	10	11	12	13	14
Coût C	34	34.9	35.8	36.7	37.6
Probabilité	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

2) On a

$$\mathrm{E}(C) = \sum_{i=10}^{14} c_i p_i = 34 \times 0.1 + 34.9 \times 0.3 + 35.8 \times 0.3 + 36.7 \times 0.2 + 37.6 \times 0.1 = 35.71$$

$$\mathrm{E}(C^2) = \sum_{i=10}^{14} c_i^2 p_i = 34^2 \times 0.1 + 34.9^2 \times 0.3 + 35.8^2 \times 0.3 + 36.7^2 \times 0.2 + 37.6^2 \times 0.1 = 1276.249$$

$$\mathrm{Var}(C) = \mathrm{E}(C^2) - \mathrm{E}(C)^2 = 1276.249 - 35.71^2 = 1.0449 \implies \sigma = \sqrt{1.0449} = 1.0222$$

Pour répondre à cette question, il était aussi possible de calculer $\mathrm{E}(X) = 11.9$ et $\mathrm{Var}(X) = 1.19$ puis d'utiliser les formules $\mathrm{E}(C) = 25 + \mathrm{E}(X) \times 0.9$ et $\mathrm{Var}(C) = 0.9^2 \times \mathrm{Var}(X)$.

Exercice III (40 min, 7 points)

On suppose que la probabilité qu'un accident se produise sur une période ne dépend que de la durée de la période et que le nombre d'accidents se produisant sur une période est indépendant du nombre d'accidents s'étant produits sur une période précédente.

1) Soit X le nombre d'accidents se produisant sur une journée (ouvrée) au hasard.

a) Le nombre d'accidents ne dépendant que de la durée et étant "sans mémoire", la variable X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Le nombre moyen d'accidents quotidiens étant 5, on en déduit que $\mathrm{E}(X) = \lambda = 5$. Et donc $\mathrm{Var}(X) = \lambda = 5$.

b) La probabilité qu'un seul accident se produise en une journée est

$$P(X = 1) = \mathrm{e}^{-5}\frac{5}{1!} \approx 0.03369$$

On pouvait aussi utiliser la table de la loi $\mathscr{P}(5)$:

$$P(X = 1) = P(X \leqslant 1) - P(X \leqslant 0) = 0.0404 - 0.0067 = 0.0337$$

c) La probabilité que 4 à 6 accidents se produisent en une journée est, en utilisant la table de $\mathscr{P}(5)$:

$$P(4 \leqslant X \leqslant 6) = P(3 < X \leqslant 6) = P(X \leqslant 6) - P(X \leqslant 3) = 0.7622 - 0.2650 = 0.4972$$

2) On observe une durée moyenne de 3 heures entre deux accidents successifs (sur la période de 7 heures à 22 heures – en dehors de cette plage horaire, le nombre d'accidents est supposé négligeable). On note Y la durée (en heures) entre deux accidents successifs.

a) On sait que 5 accidents se produisent en moyenne chaque jour, et que les accidents surviennent essentiellement entre 7 et 22 heures, soit une plage de 15 heures. Il y a donc en moyenne un accident toutes les $15/5 = 3$ heures.

b) La variable Y, représentant la durée entre deux événements d'un processus de Poisson, suit donc une loi exponentielle. On a $\mathrm{E}(X) = 1/\lambda = 3$ donc $\lambda = 1/3$ et $\mathrm{Var}(Y) = 1/\lambda^2 = 9$.

c) La probabilité qu'il y ait deux accidents successifs en moins de deux heures est

$$P(Y \leqslant 2) = \int_0^2 f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-x/3}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-x/3}\right]_0^2 = 1 - \mathrm{e}^{-2/3} = 0.4866$$

d) La probabilité qu'il n'y ait pas d'accident pendant 5 heures est

$$P(Y \geqslant 5) = \int_5^{+\infty} f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_5^{+\infty} \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-x/3}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-x/3}\right]_5^{+\infty} = \mathrm{e}^{-5/3} = 0.1889$$

Exercice IV (30 min, 4 points)

Luca Alberti, une fleuriste hongroise, envisage deux investissements alternatifs. Dans les deux cas, elle n'est pas sûre du pourcentage de rendement, mais elle pense que son incertitude peut être représentée par des distributions normales dont les moyennes et les écarts types sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

	Moyenne	Ecart-type
Investissement A	10.0	2.5
Investissement B	11.2	4.0

1) On note A la variable aléatoire donnant le rendement de l'investissement A. D'après le tableau ci-dessus, $A \sim \mathcal{N}(10, 2.5^2)$.

a) La probabilité que l'investissement A produise un retour de moins de 8 % est

$$P(A \leqslant 8) = P\left(\frac{A - 10}{2.5} \geqslant \frac{8 - 10}{2.5}\right) = P(Z \leqslant -0.8) = 1 - P(Z \leqslant 0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$$

b) La probabilité que son investissement produise un retour de plus de 13 % est

$$P(A \geqslant 13) = P\left(\frac{A - 10}{2.5} \leqslant \frac{13 - 10}{2.5}\right) = P(Z \geqslant 1.2) = 1 - P(Z \leqslant 1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151$$

c) La probabilité que son investissement produise un retour compris entre 8 % et 13 % est

$$P(8 \leqslant A \leqslant 13) = P(A \leqslant 13) - P(A \leqslant 8) = 0.8849 - 0.2119 = 0.673$$

2) Si Luca choisit l'investissement A, la probabilité d'avoir une rendement d'au moins 9 % est

$$P(A \geqslant 9) = P\left(\frac{A - 10}{2.5} \geqslant \frac{9 - 10}{2.5}\right) = P(Z \geqslant -0.4) = P(Z \leqslant 0.4) = 0.6554 = 65.54\ \%$$

Si Luca choisit l'investissement B — et d'après l'énoncé le rendement correspondant est $B \sim \mathcal{N}(11.2, 4^2)$ — la probabilité d'avoir une rendement d'au moins 9 % est

$$P(B \geqslant 9) = P\left(\frac{B - 11.2}{4} \geqslant \frac{9 - 11.2}{4}\right) = P(Z \geqslant -0.55) = P(Z \leqslant 0.55) = 0.7088 = 70.88\ \%$$

Comme $P(B \geqslant 9) > P(A \geqslant 9)$, Luca devra choisir l'investissement B.