Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Statistiques et probabilités **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Les exercices I, II et IV sont extraits ou inspirés du livre « Statistics for Business and Economics » (Tenth Global Edition) par Paul Newbold, William L. Carlson & Betty Thorne. Pearson Education, 2023.

Question de cours (10 min, 2 points)
Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance μ et de variance σ^2.

1) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2) En déduire (démontrer) que $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \geqslant 0.75$.

Exercice I (20 min, 4 points)
Un fabricant de meubles suédois indique que 55 % des tables et 30 % des chaises produites sont fournies au détaillant A. Sur le total des unités produites, 65 % sont des chaises et le reste sont des tables.

1) Quelle est la probabilité qu'une unité choisie au hasard soit une chaise et soit fournie au détaillant A ?

2) Trouvez la probabilité qu'une unité choisie au hasard soit fournie au détaillant A.

3) Quelle est la probabilité qu'une unité choisie au hasard soit une chaise ou soit fournie au détaillant A (ou les deux) ?

4) Les événements « chaise » et « fourniture au détaillant A » sont-ils statistiquement indépendants ?

Exercice II (20 min, 3 points)
Un entrepreneur s'intéresse au coût total d'un projet pour lequel il a l'intention de faire une offre. Il estime que les matériaux coûteront 25 000 € et que sa main-d'œuvre sera de 900 € par jour. Si le projet prend x jours à terminer, le coût total de la main-d'œuvre sera de $900x$ euros, et le coût total du projet (en euros) sera le suivant : $C = 25\,000 + 900x$.
En s'appuyant sur son expérience, l'entrepreneur estime les probabilités des délais d'achèvement probables du projet :

Durée (x) du projet (en jours)	10	11	12	13	14
Probabilité	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

1) Déterminer la loi de probabilité du coût total C.

2) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de C.

Exercice III (40 min, 7 points)
Selon la direction de la voirie et des déplacements de la ville de Paris, il y a en moyenne 5 accidents par jour (ouvré) sur le périphérique parisien [Données 2017, *Rapport de la Mission d'Information et d'Évaluation du Conseil de Paris*, Mai 2019].

On suppose que la probabilité qu'un accident se produise sur une période ne dépend que de la durée de la période et que le nombre d'accidents se produisant sur une période est indépendant du nombre d'accidents s'étant produits sur une période précédente.

1) Soit X le nombre d'accidents se produisant sur une journée (ouvrée) au hasard.
- **a)** Déterminer la loi de X. Donner son espérance et sa variance.
- **b)** Quelle est la probabilité qu'un seul accident se produise en une journée ?
- **c)** Quelle est la probabilité que 4 à 6 accidents se produisent en une journée ?

2) On observe une durée moyenne de 3 heures entre deux accidents successifs (sur la période de 7 heures à 22 heures – en dehors de cette plage horaire, le nombre d'accidents est supposé négligeable). On note Y la durée (en heures) entre deux accidents successifs.
- **a)** Cette donnée est-elle compatible avec celle du début de l'exercice ?
- **b)** Déterminer la loi de Y et donner son espérance et sa variance.
- **c)** Calculer la probabilité qu'il y ait deux accidents successifs en moins de deux heures.
- **d)** Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas d'accident pendant 5 heures.

Exercice IV (30 min, 4 points)
Luca Alberti, une fleuriste hongroise, envisage deux investissements alternatifs. Dans les deux cas, elle n'est pas sûre du pourcentage de rendement, mais elle pense que son incertitude peut être représentée par des distributions normales dont les moyennes et les écarts types sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

	Moyenne	Ecart-type
Investissement A	10.0	2.5
Investissement B	11.2	4.0

1) Si Luca choisit l'investissement A,
- **a)** quelle est la probabilité que son investissement produise un retour de moins de 8 % ?
- **b)** quelle est la probabilité que son investissement produise un retour de plus de 13 % ?
- **c)** quelle est la probabilité que son investissement produise un retour compris entre 8 % et 13 % ?

2) Luca souhaite faire l'investissement qui est le plus susceptible de produire un rendement d'au moins 9 %. Quel investissement devrait-elle choisir ?

Récapitulatif des lois discrètes

Loi	Notation	Support	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(1,p)$	$X(\Omega) = \{0,1\}$	$P(X=0) = q \quad P(X=1) = p$	$\mathrm{E}(X) = p$	$\mathrm{Var}(X) = pq$
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$X(\Omega) = \{0,\dots,n\}$	$P(X=k) = \binom{n}{k}\, p^k q^{n-k}$	$\mathrm{E}(X) = np$	$\mathrm{Var}(X) = npq$
Hypergéométrique	$\mathcal{H}(N,n,p)$	$X(\Omega) \subset \{0,\dots,n\}$	$P(X=k) = \dfrac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\mathrm{E}(X) = np$	$\mathrm{Var}(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	$P(X=k) = pq^{k-1}$	$\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{p}$	$\mathrm{Var}(X) = \dfrac{q}{p^2}$
Pascal	$\mathrm{Pascal}(r,p)$	$X(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$	$P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$\mathrm{E}(X) = \dfrac{r}{p}$	$\mathrm{Var}(X) = \dfrac{rq}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	$P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!}$	$\mathrm{E}(X) = \lambda$	$\mathrm{Var}(X) = \lambda$

$p \in [0,1] \qquad q = 1-p \qquad n, N, r \in \mathbb{N}^* \qquad \lambda > 0$

Récapitulatif des lois continues

Loi	Notation	Support	Loi/Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathcal{U}(a,b)$	$X(\Omega) = [a,b]$	$f_X(x) = \dfrac{1}{b-a} \quad \text{si} \quad x \in [a,b]$	$\mathrm{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$	$\mathrm{Var}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$ $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$X(\Omega) = [0,+\infty[$	$f_X(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} \quad \text{si} \quad x \geqslant 0$	$\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$	$\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$X(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathrm{E}(X) = \mu$	$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
Normale standard (Z)	$\mathcal{N}(0,1)$	$Z(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_Z(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$	$\mathrm{E}(Z) = 0$	$\mathrm{Var}(Z) = 1$
Khi-deux (K^2)	$\chi^2(n)$	$K^2(\Omega) = [0,+\infty[$	$K^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \quad \text{où} \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ ind.	$\mathrm{E}(K^2) = n$	$\mathrm{Var}(K^2) = 2n$
Student (T)	$St(n)$	$T(\Omega) = \mathbb{R}$	$T = \dfrac{Z}{\sqrt{K^2/n}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\ K^2 \sim \chi^2(n) \end{cases}$ ind.	$\mathrm{E}(T) = 0$	$\mathrm{Var}(T) = \dfrac{n}{n-2}$
Fisher (F)	$F(n_1,n_2)$	$F(\Omega) = [0,+\infty[$	$F = \dfrac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2} \quad \text{où} \quad \begin{cases} K_1^2 \sim \chi^2(n_1) \\ K_2^2 \sim \chi^2(n_2) \end{cases}$ ind.	$\mathrm{E}(F) = \dfrac{n_2}{n_2-2}$	$\mathrm{Var}(F) = \dfrac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

$a, b \in \mathbb{R} \qquad a < b \qquad \lambda > 0 \qquad \mu \in \mathbb{R} \qquad \sigma > 0 \qquad n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$

Fonction de répartition de la loi de Poisson

$$P(\mathscr{P}(\lambda) \leqslant k)$$

Exemple : $P\big(\mathscr{P}(2.5) \leqslant 4\big) = 0.8912$

$k\backslash\lambda$	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997

$k\backslash\lambda$	**1**	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**	**3.5**	**4**	**4.5**	**5**
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

$k\backslash\lambda$	**5.5**	**6**	**6.5**	**7**	**7.5**	**8**	**8.5**	**9**	**9.5**
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.70 6	0.6453
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.80 3	0.7520
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
18	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991

Fonction de répartition de la loi normale standard

$$P(\mathcal{N}(0,1) \leqslant z)$$

Exemple : $P\big(\mathcal{N}(0,1) \leqslant 1.33\big) = 0.9082$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998