Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023-2024

Session 1 | **Semestre 3**

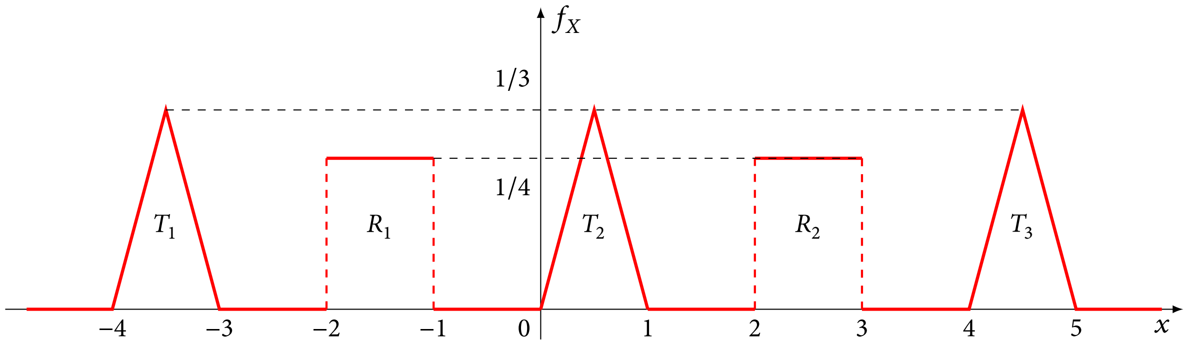
Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Statistiques et probabilités – Éléments de correction | **Durée :** 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (20 min, 4 points)

On considère une variable aléatoire continue X de densité f_X représentée ci-dessous :



1) Le graphe de f_X correspond bien à une fonction positive (graphe au-dessus de l'axe des x), continue (sauf en -2, -1, 2 et 3) et d'intégrale égale à 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \text{Aire}(T_1) + \text{Aire}(R_1) + \text{Aire}(T_2) + \text{Aire}(R_2) + \text{Aire}(T_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 1$$

2) En justifiant graphiquement vos réponses, déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(X < -3) = \text{Aire}(T1) = 1/6$

b) $P(X > 3) = \text{Aire}(T3) = 1/6$

c) $P(-2 \leqslant X \leqslant 3) = \text{Aire}(R_1) + \text{Aire}(T_2) + \text{Aire}(R_2) = 1/4 + 1/6 + 1/4 = 2/3$

d) $P(|X - 3| < 2) = P(1 < X < 5) = \text{Aire}(R_2) + \text{Aire}(T_3) = 1/4 + 1/6 = 5/12$

3) Le graphe de f_X est symétrique par rapport à $x = 0.5$ qui correspond donc à la médiane et à l'espérance de X. Donc $\mathrm{E}(X) = 0.5$.

4) On voit sur le graphique que $-4 \leqslant X \leqslant 5$. D'où $-4 - 0.5 \leqslant X - \mathrm{E}(X) \leqslant 5 - 0.5$ et donc $|X - \mathrm{E}(X)| \leqslant 4.5$. On en déduit que $\sigma_X \leqslant 4.5$.

Exercice II (40 min, 6 points)

Dans une région française, on estime à 4 % le nombre de fausses pièces de 2 € en circulation. Soit X le nombre de fausses pièces de 2 € dans une recette de M euros composée uniquement de pièces de 2 €.

1) Les M euros de la recette, soit $M/2$ pièces de 2 €, correspondent à tirages aléatoires, sans remise, de pièces de 2 € dans l'ensemble des pièces de 2 € en circulation, parmi lesquelles une proportion $p = 0.04$ est fausse. On a donc $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, M/2, 0.04)$. Comme le nombre N de pièces en circulation est inconnu mais forcément très supérieur au nombre de pièces de la recette, on peut approcher la loi hyper-géométrique par une loi binomiale (avec remises). Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(M/2, 0.04)$.

2) On suppose que la recette s'élève à 40 €. La loi de X est donc $\mathcal{B}(20, 0.04)$.

a) La probabilité que cette recette contienne exactement 2 fausses pièces de 2 € est

$$P(X = 2) = \binom{20}{2} 0.04^2 0.96^{18} \approx 14.58~\%$$

b) La probabilité que cette recette contienne au moins 2 fausses pièces de 2 € est

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{20}{0} 0.04^0 0.96^{20} - \binom{20}{1} 0.04^1 0.96^{19} = 1 - 0.4420 - 0.3683 = 18.97~\%$$

3) On suppose à présent que la recette est de 250 €.

a) La variable X suit à présent une loi $\mathcal{B}(125, 0.04)$. Comme $n = 125$ est grand ($n > 50$) et $p = 0.04$ petit ($p < 0.1$), on peut approcher la loi binomiale par une loi de Poisson $\mathcal{P}(125 \times 0.04)$, soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(5)$.

b) La table de la loi de Poisson de paramètre 5 donne la probabilité que le nombre de fausses pièces soit inférieur ou égal à 8 : $P(X \leqslant 8) = 0.9319$.

4) Un commerçant observe que 8 fois sur 10, sa recette (supposée fixe et composée uniquement de pièces de 2 €) contient au moins 7 fausses pièces. On a donc $P(X \geqslant 7) = 0.80$ ou encore $P(X \leqslant 6) = 0.20$. On lit dans la table de la loi de Poisson que $P(\mathcal{P}(9) \leqslant 6) = 0.2068$. On en déduit que $\lambda = N \times 0.04 = 9$, soit $N = 225$. La recette du commerçant est donc $M = 450$ €.

Exercice III (20 min, 3 points)

Selon l'Observatoire National de la Vie Etudiante (OVE), 31 % des étudiants de 18 à 20 ans exercent une activité rémunérée pendant l'année universitaire, de même que 44 % des 21-23 ans et que 51 % des 24 ans et plus. En outre, l'OVE affirme que les 18-20 ans représentent 48 % des étudiants, 30 % pour les 21-23 ans et 22 % pour les 24 ans et plus. (*Source : Enquête 2020 sur les conditions de vie des étudiants*, `https://www.ove-national.education.fr`)

1) On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un étudiant au hasard (donc avec équi-probabilité). On note R l'événement « l'étudiant exerce une activité rémunérée », 18–20, 21–23 et 24+ les événements « l'étudiant est dans la tranche d'âge » correspondante. D'après l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} P(R|18\text{–}20) &= 0.31 & P(18\text{–}20) &= 0.48 \\ P(R|21\text{–}23) &= 0.44 & P(21\text{–}23) &= 0.30 \\ P(R|24+) &= 0.51 & P(24+) &= 0.22 \end{aligned}$$

2) D'après la formule des probabilités totales, la probabilité qu'un étudiant exerce une activité rémunérée est

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R|18\text{–}20) \times P(18\text{–}20) + P(R|21\text{–}23) \times P(21\text{–}23) + P(R|24+) \times P(24+) \\ &= 0.31 \times 0.48 + 0.44 \times 0.30 + \times 0.51 \times 0.22 = 0.393 \end{aligned}$$

3) La probabilité, qu'un étudiant exerçant une activité rémunérée ait au plus 20 ans est

$$P(18\text{–}20|R) = \frac{P(R|18\text{–}20) \times P(18\text{–}20)}{P(R)} = \frac{0.31 \times 0.48}{0.393} = 37.86~\%$$

Exercice IV (30 min, 4 points)

La consommation moyenne d'un véhicule de tourisme est annoncée à 5.5 litres pour 100 km avec un écart-type de 0.5 litre. On suppose que la consommation X pour 100 km suit une loi normale.

1) D'après l'énoncé, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(5.5, 0.5)$.

2) La probabilité que la consommation pour un trajet de 100 km soit supérieure à 6 litres est

$$P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 6) = 1 - P\left(X^* \leqslant \frac{6 - 5.5}{0.5}\right) = 1 - P(Z \leqslant 1) = 1 - 0.8413 = 15.87~\%$$

3) La probabilité que la consommation pour un trajet de 100 km soit inférieure à 4.5 litres est

$$P(X \leqslant 4.5) = 1 - P\left(X^* \leqslant \frac{4.5 - 5.5}{0.5}\right) = P(Z \leqslant -2) = 1 - P(Z \leqslant 2) = 1 - 0.9772 = 2.28~\%$$

4) La probabilité que la consommation pour un trajet de 100 km soit comprise entre 4.5 et 6 litres est

$$P(4.5 \leqslant X \leqslant 6) = P(X \leqslant 6) - P(X \leqslant 4.5) = 0.8413 - 0.0228 = 81.85\ \%$$

5) On souhaite déterminer la quantité d'essence Q qu'il doit rester dans le réservoir pour pouvoir effectuer un trajet de 100 km (sans tomber en panne d'essence) avec une probabilité de 95 %, c'est à dire

$$P(X \leqslant Q) = 0.95 \iff P\left(X^* \leqslant \frac{Q - 5.5}{0.5}\right) = 0.95 \iff \frac{Q - 5.5}{0.5} = z_{0.95} = 1.645 \iff Q = 6.32 \text{ litres}$$