Faculté de Droit & des Sciences Économiques
Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023-2024

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Statistiques et probabilités **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

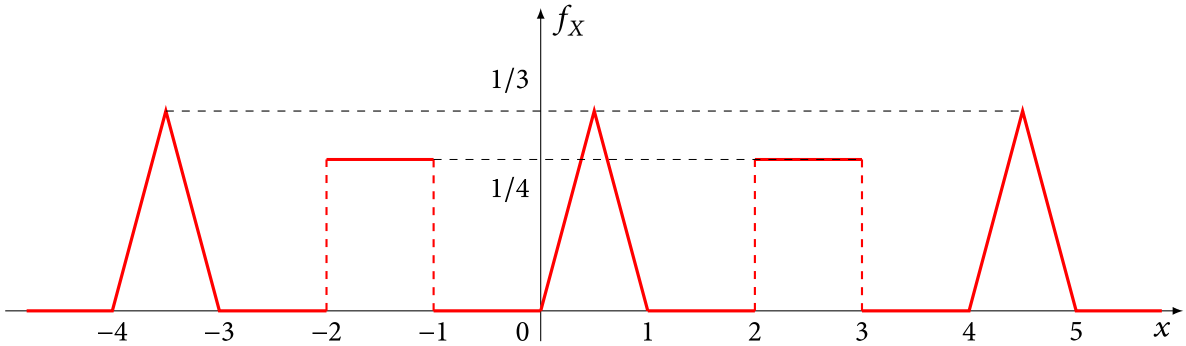
Question de cours (10 min, 3 points)
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes.

1) Rappeler la définition de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire. Que mesurent-ils ?

2) Comment définit-on l'indépendance de X et Y ? Quelle est son interprétation ?

3) Quel est le rapport entre l'indépendance et la corrélation ?

Exercice I (20 min, 4 points)
On considère une variable aléatoire continue X de densité f_X représentée ci-dessous :



1) Montrer que le graphe de f_X correspond bien au graphe d'une densité.

2) En justifiant graphiquement vos réponses, déterminer les probabilités suivantes :

- **a)** $P(X < -3)$
- **b)** $P(X > 3)$
- **c)** $P(-2 \leqslant X \leqslant 3)$
- **d)** $P(|X-3| < 2)$

3) Déterminer graphiquement l'espérance de X.

4) Expliquer pourquoi $\sigma_X \leqslant 4.5$.

Exercice II (40 min, 6 points)
Dans une région française, on estime à 4 % le nombre de fausses pièces de 2 € en circulation. Soit X le nombre de fausses pièces de 2 € dans une recette de M euros composée uniquement de pièces de 2 €.

1) Déterminer la loi de X.

2) On suppose que la recette s'élève à 40 €.
  a) Quelle est la probabilité que cette recette contienne exactement 2 fausses pièces de 2 € ?
  b) Quelle est la probabilité que cette recette contienne au moins 2 fausses pièces de 2 € ?

3) On suppose à présent que la recette est de 250 €.
  a) Montrer que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
  b) Calculer la probabilité que le nombre de fausses pièces soit inférieur ou égal à 8.

4) Un commerçant observe que 8 fois sur 10, sa recette (supposée fixe et composée uniquement de pièces de 2 €) contient au moins 7 fausses pièces. Quelle est la recette de ce commerçant ?

Exercice III (20 min, 3 points)
Selon l'Observatoire National de la Vie Etudiante (OVE), 31 % des étudiants de 18 à 20 ans exercent une activité rémunérée pendant l'année universitaire, de même que 44 % des 21-23 ans et que 51 % des 24 ans et plus. En outre, l'OVE affirme que les 18-20 ans représentent 48 % des étudiants, 30 % pour les 21-23 ans et 22 % pour les 24 ans et plus. (*Source : Enquête 2020 sur les conditions de vie des étudiants*, `https://www.ove-national.education.fr`)

1) Retranscrire l'énoncé ci-dessus en utilisant des événements et des probabilités.

2) Calculer la probabilité qu'un étudiant exerce une activité rémunérée.

3) Quelle est la probabilité, qu'un étudiant exerçant une activité rémunérée ait au plus 20 ans ?

Exercice IV (30 min, 4 points)
La consommation moyenne d'un véhicule de tourisme est annoncée à 5.5 litres pour 100 km avec un écart-type de 0.5 litre. On suppose que la consommation X pour 100 km suit une loi normale.

1) Quelle est la loi suivie par X ?

2) Quelle est la probabilité que la consommation pour un trajet de 100 km soit supérieure à 6 litres ?

3) Quelle est la probabilité que la consommation pour un trajet de 100 km soit inférieure à 4.5 litres ?

4) Quelle est la probabilité que la consommation pour un trajet de 100 km soit comprise entre 4.5 et 6 litres ?

5) Quelle quantité d'essence doit-il rester dans le réservoir pour pouvoir effectuer un trajet de 100 km (sans tomber en panne d'essence) avec une probabilité de 95 % ?

Récapitulatif des lois discrètes

Loi	Notation	Support	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathscr{B}(1,p)$	$X(\Omega)=\{0,1\}$	$P(X=0)=q \quad P(X=1)=p$	$\mathrm{E}(X)=p$	$\mathrm{Var}(X)=pq$
Binomiale	$\mathscr{B}(n,p)$	$X(\Omega)=\{0,\dots,n\}$	$P(X=k)=\binom{n}{k}\,p^k q^{n-k}$	$\mathrm{E}(X)=np$	$\mathrm{Var}(X)=npq$
Hypergéométrique	$\mathscr{H}(N,n,p)$	$X(\Omega)\subset\{0,\dots,n\}$	$P(X=k)=\dfrac{\binom{Np}{k}\times\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\mathrm{E}(X)=np$	$\mathrm{Var}(X)=npq\dfrac{N-n}{N-1}$
Géométrique	$\mathscr{G}(p)$	$X(\Omega)=\mathbb{N}^*$	$P(X=k)=pq^{k-1}$	$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{p}$	$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{q}{p^2}$
Pascal	$\mathrm{Pascal}(r,p)$	$X(\Omega)=\{r,r+1,\dots\}$	$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}$	$\mathrm{E}(X)=\dfrac{r}{p}$	$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{rq}{p^2}$
Poisson	$\mathscr{P}(\lambda)$	$X(\Omega)=\mathbb{N}$	$P(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	$\mathrm{E}(X)=\lambda$	$\mathrm{Var}(X)=\lambda$

$p\in[0,1] \qquad q=1-p \qquad n,N,r\in\mathbb{N}^* \qquad \lambda>0$

Récapitulatif des lois continues

Loi	Notation	Support	Loi/Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathscr{U}(a,b)$	$X(\Omega)=[a,b]$	$f_X(x)=\dfrac{1}{b-a}$ si $x\in[a,b]$	$\mathrm{E}(X)=\dfrac{a+b}{2}$	$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathscr{E}(\lambda)$ $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$X(\Omega)=[0,+\infty[$	$f_X(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$ si $x\geqslant 0$	$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{\lambda}$	$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathscr{N}(\mu,\sigma)$	$X(\Omega)=\mathbb{R}$	$f_X(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathrm{E}(X)=\mu$	$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$
Normale standard (Z)	$\mathscr{N}(0,1)$	$Z(\Omega)=\mathbb{R}$	$f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$	$\mathrm{E}(Z)=0$	$\mathrm{Var}(Z)=1$
Khi-deux (K^2)	$\chi^2(n)$	$K^2(\Omega)=[0,+\infty[$	$K^2=\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ où $Z_i\hookrightarrow\mathscr{N}(0,1)$ ind.	$\mathrm{E}(K^2)=n$	$\mathrm{Var}(K^2)=2n$
Student (T)	$St(n)$	$T(\Omega)=\mathbb{R}$	$T=\dfrac{Z}{\sqrt{K^2/n}}$ où $\begin{cases}Z\hookrightarrow\mathscr{N}(0,1)\\K^2\hookrightarrow\chi^2(n)\end{cases}$ ind.	$\mathrm{E}(T)=0$	$\mathrm{Var}(T)=\dfrac{n}{n-2}$
Fisher (F)	$F(n_1,n_2)$	$F(\Omega)=[0,+\infty[$	$F=\dfrac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2}$ où $\begin{cases}K_1^2\hookrightarrow\chi^2(n_1)\\K_2^2\hookrightarrow\chi^2(n_2)\end{cases}$ ind.	$\mathrm{E}(F)=\dfrac{n_2}{n_2-2}$	$\mathrm{Var}(F)=\dfrac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

$a,b\in\mathbb{R} \qquad a<b \qquad \lambda>0 \qquad \mu\in\mathbb{R} \qquad \sigma>0 \qquad n,n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$

Fonction de répartition de la loi de Poisson

$$P(\mathcal{P}(\lambda) \leqslant k)$$

Exemple : $P\big(\mathcal{P}(2.5) \leqslant 4\big) = 0.8912$

$k\backslash\lambda$	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997

$k\backslash\lambda$	**1**	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**	**3.5**	**4**	**4.5**	**5**
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

$k\backslash\lambda$	**5.5**	**6**	**6.5**	**7**	**7.5**	**8**	**8.5**	**9**	**9.5**
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.70 6	0.6453
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.80 3	0.7520
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
18	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991

Fonction de répartition de la loi normale standard

$$P(\mathcal{N}(0,1) \leqslant z)$$

Exemple : $P\big(\mathcal{N}(0,1) \leqslant 1.33\big) = 0.9082$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998