Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

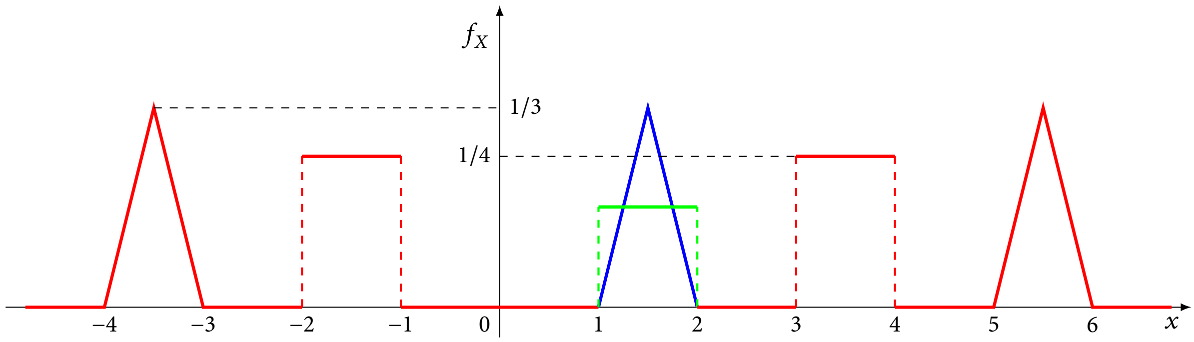
ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022-2023

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Statistiques et probabilités – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 4 points)
On considère une variable aléatoire continue X de densité f_X partiellement représentée ci-dessous :



1) Le graphe proposé correspond à une fonction positive (graphe au dessus de l'axe) continue (sauf en −2, −1, 3 et 4). Pour qu'il corresponde au graphe d'une densité, il faut que l'intégrale de la fonction f_x, c'est-à-dire l'aire comprise entre l'axe des x et la courbe, soit égale à 1. On a

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + ? + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \implies ? = \frac{1}{6}$$

L'aire manquante doit donc être égale à 1/6. Deux solutions sont proposées (en bleu et vert).

2) On a

$$P(X < -3) = 1/6 \quad P(X > 6) = 0 \quad P(1 \leqslant X \leqslant 2) = 1/6 \quad P(3 \leqslant X \leqslant 6) = 5/12 \quad P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 0$$

3) On voit sur le graphique que $P(X \leqslant 1.5) = P(X \geqslant 1.5) = 0.5$. La médiane de X vaut donc 1.5.

4) Le graphique n'étant pas symétrique, on **ne** peut **pas** conclure que $\mathrm{E}(X) = \mathrm{Me}(X)$. On voit que la partie à gauche de la médiane est « une unité au dessous de la symétrie ». On peut donc en déduire que $\mathrm{E}(X) < \mathrm{Me}(X)$ et donc $\mathrm{E}(X) < 1.5$.

Exercice II (20 min, 4 points)
Selon le site `cleerly.fr`, 25 % des 18-29 ans possèdent une assurance-vie (placement financier, à ne pas confondre avec une assurance décès !) de même que 40 % des 30-39 ans et 46 % des 40-49 ans (données 2022). En outre, selon `insee.fr`, les 18-29 ans représentent 36 % de la population de 18-49, les 30-39 ans représentant 31 % et les 40-49 ans, 33 %. Lundi matin, un banquier a rendez-vous avec un client (supposé âgé de 18 à 49 ans).

1) On considère que le client se présentant au banquier le lundi matin est choisi au hasard. L'univers de possibles Ω est donc l'ensemble des personnes entre 18 et 49 ans. On fait l'hypothèse d'équiprobabilité.

- Soit A l'événement « l'individu est dans la tranche 18-29 ans ». On a $P(A) = 0.36$.
- Soit B l'événement « l'individu est dans la tranche 30-39 ans ». On a $P(B) = 0.31$.
- Soit C l'événement « l'individu est dans la tranche 30-39 ans ». On a $P(C) = 0.33$.

Si V est l'événement « l'individu possède une assurance-vie », alors on a $P(V|A) = 0.25$, $P(V|B) = 0.40$ et $P(V|C) = 0.46$.

2) D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que le client possède une assurance-vie est

$$P(V) = P(V|A)P(A) + P(V|B)P(B) + P(V|C)P(C) = 0.25 \times 0.36 + 0.40 \times 0.31 + 0.46 \times 0.33 = 0.3658 = 36.58\ \%$$

3) D'après la formule de Bayes, la probabilité que si le client possède une assurance-vie, il ait moins de 30 ans est

$$P(A|V) = \frac{P(V|A)P(A)}{P(V)} = \frac{0.25 \times 0.36}{0.3658} \approx 0.246 = 24.6\ \%$$

Exercice III (20 min, 4 points)
Selon la Direction Générale des Finances Publiques (DGFiP), en 2020, près de 2.6 % des foyers résidant à Paris et imposés à l'Impot sur le Revenu (IR) sont soumis à l'IFI, Impôt sur la Fortune Immobilière. (Il s'agit des foyers fiscaux dont le patrimoine immobilier a une valeur nette excédant 1.3 million d'euros.)
Afin d'effectuer un contrôle, la Direction Régionale des Finance Publiques (DRFiP) de Paris sélectionne aléatoirement un échantillon de 154 foyers parisiens soumis à l'impôt sur le Revenu (IR). Soit X le nombre de foyers soumis à l'IFI parmi les 154 foyers sélectionnés.

1) Il s'agit de $n = 154$ tirages aléatoires <u>sans remise</u> dans une population dont une proportion $p = 0.026$ est soumise à l'IFI. La loi de X est donc une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, 154, 0.026)$. La taille N de la population (nombre de contribuables parisiens) est inconnue mais peut être supposée très supérieure à 154 ! On approche donc la loi hypergéométrique par une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(154, 0.026)$.

2) On a $\mathrm{E}(X) = np = 154 \times 0.026 = 4.004$ et $\mathrm{Var}(X) = npq = 154 \times 0.026 \times 0.974 \approx 3.9$.

3) La probabilité qu'un seul foyer des 154 soit soumis à l'IFI est

$$P(X = 1) = \binom{154}{1} 0.026^1 \times 0.974^{153} \approx 0.0711 = 7.11\ \%$$

4) Comme n est grand et p petit, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(154, 0.026)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(154 \times 0.026) = \mathcal{P}(4.004)$. En utilisant la table de la loi de Poisson pour $\lambda = 4$, on calcule la probabilité qu'au moins 7 foyers soient soumis à l'IFI :

$$P(X \geqslant 7) = 1 - P(X \leqslant 6) = 1 - 0.8893 = 0.1107 = 11.07\ \%$$

Exercice IV (35 min, 5 points)
En 2022, on estime le budget mensuel moyen d'un étudiant du supérieur à 635 € avec un écart-type de 55 € (*Source budget moyen* : `money.wizbii.com`). On suppose que le budget mensuel X d'un étudiant (choisi au hasard) suit une loi normale.

1) D'après l'énoncé le budget X suit une loi normale $\mathcal{N}(635, 55)$.

2) La probabilité que le budget d'un étudiant soit supérieur à 700 € est

$$P(X \geqslant 700) = P\left(\frac{X - 635}{55} \geqslant \frac{700 - 635}{55}\right) = P(X^* \geqslant 1.18) = 1 - P(X^* \leqslant 1.18) = 1 - 0.8810 = 0.119 = 11.90\ \%$$

3) La probabilité que le budget d'un étudiant soit inférieur à 580 € est

$$P(X \leqslant 580) = P\left(\frac{X - 635}{55} \leqslant \frac{580 - 635}{55}\right) = P(X^* \leqslant -1) = 1 - P(X^* \leqslant 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 = 15.87\ \%$$

4) D'après les calculs précédents, la probabilité que le budget d'un étudiant soit compris entre 580 et 700 € est

$$P(580 \leqslant X \leqslant 700) = P(X \leqslant 700) - P(X \leqslant 580) = 0.8810 - 0.1587 = 0.7223 = 72.23\ \%$$

Pour l'année 2022-2023, le montant mensuel de la bourse sur critères sociaux accordée par l'état s'élève (à l'échelon maximal 7) à 596.50 € (*Source* : `service-public.fr`)

5) La probabilité que le budget mensuel d'un étudiant soit couvert par la bourse est

$$P(X \leqslant 596.5) = P(X^* \leqslant -0.7) = 1 - P(X^* \leqslant 0.7) = 1 - 0.7580 = 0.242 = 24.2\ \%$$

6) Soit B le montant de la bourse nécessaire pour couvrir le budget mensuel d'un étudiant avec une probabilité de 95 %. On a donc

$$P(X \leqslant B) = 0.95 \implies P\left(X^* \leqslant \frac{B - 635}{55}\right) = 0.95 \implies \frac{B - 635}{55} = z_{0.95} = 1.645 \implies B = 635 + 1.645 \times 55 = 725.475$$