

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022-2023

Session 1

Semestre 3

Licence Economie-Gestion – 2<sup>e</sup> année

**Matière :** Statistiques et probabilités

**Durée :** 2 heures

**Enseignant :** Vincent Jalby

**Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.**

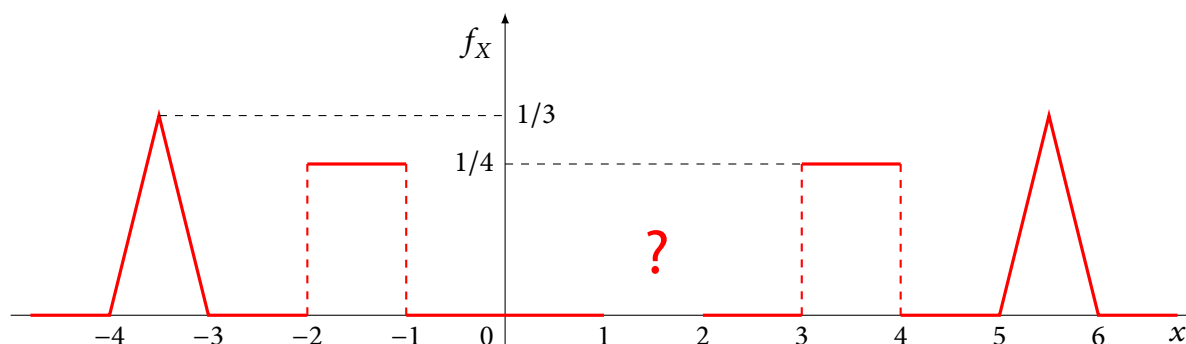
**Question de cours** (15 min, 3 points)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes.

- 1) Rappeler la définition de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire. Que mesurent-ils ?
- 2) Comment définit-on l'indépendance de  $X$  et  $Y$  ? Quelle est son interprétation ?
- 3) Quel est le rapport entre l'indépendance et la corrélation ?

**Exercice I** (30 min, 4 points)

On considère une variable aléatoire continue  $X$  de densité  $f_X$  partiellement représentée ci-dessous :



- 1) Compléter le graphe de  $f_X$  entre 1 et 2 de sorte que  $f_X$  soit bien une densité. (Reproduire le graphe complet sur votre copie, et justifier que vous obtenez bien le graphe d'une densité.)
- 2) En justifiant graphiquement vos réponses, déterminer les probabilités suivantes :
  - a)  $P(X < -3)$ ,  $P(X > 6)$
  - b)  $P(1 \leq X \leq 2)$
  - c)  $P(3 \leq X \leq 6)$
  - d)  $P(-1 \leq X \leq 1)$
- 3) Déterminer graphiquement la médiane de  $X$ .
- 4) Que pouvez-vous dire de la valeur de l'espérance de  $X$  ?

**Exercice II** (20 min, 4 points)

Selon le site [cleerly.fr](https://www.cleerly.fr), 25 % des 18-29 ans possèdent une assurance-vie (placement financier, à ne pas confondre avec une assurance décès!) de même que 40 % des 30-39 ans et 46 % des 40-49 ans (données 2022). En outre, selon [insee.fr](https://www.insee.fr), les 18-29 ans représentent 36 % de la population de 18-49, les 30-39 ans représentant 31 % et les 40-49 ans, 33 %. Lundi matin, un banquier a rendez-vous avec un client (supposé âgé de 18 à 49 ans).

- 1) Retranscrire l'énoncé ci-dessus en utilisant des événements et des probabilités.
- 2) Calculer la probabilité que le client possède une assurance-vie.
- 3) Quelle est la probabilité, s'il possède une assurance-vie, qu'il ait moins de 30 ans ?

**Exercice III** (20 min, 4 points)

Selon la Direction Générale des Finances Publiques (DGFIP), en 2020, près de 2.6 % des foyers résidant à Paris et imposés à l'Impôt sur le Revenu (IR) sont soumis à l'IFI, Impôt sur la Fortune Immobilière. (Il s'agit des foyers fiscaux dont le patrimoine immobilier a une valeur nette excédant 1.3 million d'euros.)

Afin d'effectuer un contrôle, la Direction Régionale des Finances Publiques (DRFiP) de Paris sélectionne aléatoirement un échantillon de 154 foyers parisiens soumis à l'impôt sur le Revenu (IR). Soit  $X$  le nombre de foyers soumis à l'IFI parmi les 154 foyers sélectionnés.

- 1) Déterminer la loi de  $X$ .
- 2) Calculer son espérance et sa variance.
- 3) Quelle est la probabilité qu'un seul foyer des 154 soit soumis à l'IFI ?
- 4) En utilisant une approximation (à justifier), calculer la probabilité qu'au moins 7 foyers (i.e., 7 foyers ou plus) soient soumis à l'IFI.

**Exercice IV** (35 min, 5 points)

En 2022, on estime le budget mensuel moyen d'un étudiant du supérieur à 635 € avec un écart-type de 55 € (*Source budget moyen* : [money.wizbii.com](https://www.money.wizbii.com)). On suppose que le budget mensuel  $X$  d'un étudiant (choisi au hasard) suit une loi normale.

- 1) Quelle est la loi suivie par  $X$  ?
- 2) Quelle est la probabilité que le budget d'un étudiant soit supérieur à 700 € ?
- 3) Quelle est la probabilité que le budget d'un étudiant soit inférieur à 580 € ?
- 4) Quelle est la probabilité que le budget d'un étudiant soit compris entre 580 et 700 € ?

Pour l'année 2022-2023, le montant mensuel de la bourse sur critères sociaux accordée par l'état s'élève (à l'échelon maximal 7) à 596.50 € (*Source* : [service-public.fr](https://www.service-public.fr))

- 5) Quel est la probabilité que le budget mensuel d'un étudiant soit couvert par la bourse ?
- 6) Quel devrait être le montant de cette bourse pour couvrir le budget mensuel d'un étudiant avec une probabilité de 95 % ?

## Récapitulatif des lois discrètes

Loi	Notation	Support	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(1, p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$	$P(X=0) = q \quad P(X=1) = p$	$E(X) = p$	$\text{Var}(X) = pq$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq$
Hypergéométrique	$\mathcal{H}(N, n, p)$	$X(\Omega) \subset \{0, \dots, n\}$	$P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	$P(X=k) = pq^{k-1}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$
Pascal	$\text{Pascal}(r, p)$	$X(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$	$P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$E(X) = \frac{r}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$	$\text{Var}(X) = \lambda$

$$p \in [0, 1] \quad q = 1 - p \quad n, N, r \in \mathbb{N}^* \quad \lambda > 0$$

## Récapitulatif des lois continues

Loi	Notation	Support	Loi/Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathcal{U}(a, b)$	$X(\Omega) = [a, b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{si } x \in [a, b]$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$ $\text{Exp}(\lambda)$	$X(\Omega) = [0, +\infty[$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{si } x \geq 0$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$X(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$E(X) = \mu$	$\text{Var}(X) = \sigma^2$
Normale standard (Z)	$\mathcal{N}(0, 1)$	$Z(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$	$E(Z) = 0$	$\text{Var}(Z) = 1$
Khi-deux ( $K^2$ )	$\chi^2(n)$	$K^2(\Omega) = [0, +\infty[$	$K^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \quad \text{où } Z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ ind.}$	$E(K^2) = n$	$\text{Var}(K^2) = 2n$
Student (T)	$St(n)$	$T(\Omega) = \mathbb{R}$	$T = \frac{Z}{\sqrt{K^2/n}} \quad \text{où } \begin{cases} Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ K^2 \hookrightarrow \chi^2(n) \end{cases} \text{ ind.}$	$E(T) = 0$	$\text{Var}(T) = \frac{n}{n-2}$
Fisher (F)	$F(n_1, n_2)$	$F(\Omega) = [0, +\infty[$	$F = \frac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2} \quad \text{où } \begin{cases} K_1^2 \hookrightarrow \chi^2(n_1) \\ K_2^2 \hookrightarrow \chi^2(n_2) \end{cases} \text{ ind.}$	$E(F) = \frac{n_2}{n_2-2}$	$\text{Var}(F) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \quad \lambda > 0 \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \sigma > 0 \quad n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$$

## Fonction de répartition de la loi de Poisson

$$P(\mathcal{P}(\lambda) \leq k)$$

*Exemple :  $P(\mathcal{P}(2.5) \leq 4) = 0.8912$*

$k \backslash \lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997

$k \backslash \lambda$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

$k \backslash \lambda$	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.706	0.6453
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.803	0.7520
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
18	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991

## Fonction de répartition de la loi normale standard

$$P(\mathcal{N}(0, 1) \leq z)$$

*Exemple :  $P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 1.33) = 0.9082$*

<b>z</b>	<b>0.00</b>	<b>0.01</b>	<b>0.02</b>	<b>0.03</b>	<b>0.04</b>	<b>0.05</b>	<b>0.06</b>	<b>0.07</b>	<b>0.08</b>	<b>0.09</b>
<b>0.0</b>	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
<b>0.1</b>	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
<b>0.2</b>	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
<b>0.3</b>	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
<b>0.4</b>	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
<b>0.5</b>	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
<b>0.6</b>	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
<b>0.7</b>	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
<b>0.8</b>	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
<b>0.9</b>	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
<b>1.0</b>	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
<b>1.1</b>	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
<b>1.2</b>	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
<b>1.3</b>	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
<b>1.4</b>	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
<b>1.5</b>	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
<b>1.6</b>	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
<b>1.7</b>	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
<b>1.8</b>	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
<b>1.9</b>	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
<b>2.0</b>	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
<b>2.1</b>	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
<b>2.2</b>	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
<b>2.3</b>	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
<b>2.4</b>	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
<b>2.5</b>	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
<b>2.6</b>	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
<b>2.7</b>	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
<b>2.8</b>	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
<b>2.9</b>	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
<b>3.0</b>	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
<b>3.1</b>	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
<b>3.2</b>	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
<b>3.3</b>	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
<b>3.4</b>	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998