Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022

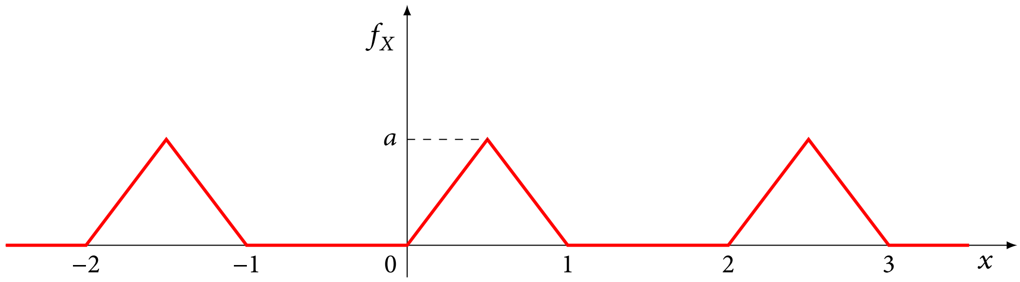
Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Statistiques et probabilités – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Exercice I (30 min, 4 points)
On considère une variable aléatoire continue X de densité f_X représentée ci-dessous :



1) Le graphe ci-dessus correspond bien à une densité car il s'agit d'un fonction positive (graphe au dessus de l'axe des x), continue (graphe sans discontinuité). On doit en outre avoir

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 3 \times \frac{a \times 1}{2} = \frac{3a}{2} \implies a = \frac{2}{3}$$

2)

- **a)** $P(X < 0) = 1/3$ car il s'agit de l'aire du premier triangle. $P(X > 3) = 0$ car la densité est nulle pour $x > 3$
- **b)** $P(-1 \leq X \leq 0) = 0$ car la densité est nulle entre -1 et 0.
- **c)** $P(0 \leq X \leq 3) = 2/3$ car il s'agit de l'aire des deux derniers triangles.

3) La densité est symétrique par rapport à $x = 1/2$ qui correspond donc à la médiane et à l'espérance. Donc $\mathrm{E}(X) = 1/2$.

4) On a

$$-2 \leq X \leq 3 \implies -2 - 1/2 \leq X - \mathrm{E}(X) \leq 3 - 1/2 \implies |X - \mathrm{E}(X)| \leq 2.5$$

L'écart (absolu) maximum entre X et son espérance est donc 2.5. L'écart-type de X est donc inférieur à 2.5.

Exercice II (20 min, 4 points)
Les 65 trains s'arrêtant quotidiennement dans une gare sont pour 40 % d'entre-eux des TGV, pour 35 % des trains express régionaux (TER) et pour 25 % des trains Intercités. Le chef de gare a observé que 3 % des TGV étaient en retard, de même que 6 % des TER et 10 % des Intercités.

1) On considère l'expérience aléatoire qui consiste à « choisir un train au hasard ». L'univers des possible Ω est donc l'ensemble des trains s'arrêtant dans cette gare. La tirage étant aléatoire, chaque train a la même probabilité d'être choisi. On fait donc l'hypothèse d'équi-probabilité. On note R l'événement « le train est en retard », et TGV, TER et INT l'événement correspondant à chaque type de train. On a

$$P(TGV) = 0.40 \quad P(R|TGV) = 0.03 \quad P(TER) = 0.35 \quad P(R|TER) = 0.06 \quad P(INT) = 0.25 \quad P(R|INT) = 0.10$$

2) D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(R) = P(R|TGV)\times P(TGV)+P(R|TER)\times P(TER)+P(R|INT)\times P(INT) = 0.03\times 0.40+0.06\times 0.35+0.10\times 0.25 = 0.058$$

3) D'après la formule de Bayes, on a

$$P(TGV|R) = \frac{P(R|TGV) \times P(TGV)}{P(R)} = \frac{0.03 \times 0.40}{0.058} = 0.2069 \approx 20.7\ \%$$

Exercice III (20 min, 4 points)
Parmi les 300 élèves d'une école élémentaire de la ville, 135 mangent à la cantine. Soit X le nombre d'élèves mangeant à la cantine parmi les 24 élèves de CP.

1) On sait que $p = 135/300 = 0.45 = 45\ \%$ des élèves mangent à la cantine. On peut considérer les 24 élèves de CP comme un tirage aléatoire sans remise parmi les 300 élèves de l'école. On a donc $X \hookrightarrow \mathcal{H}(300, 24, 0.45)$.

2) On a

$$\mathrm{E}(X) = 24 \times 0.45 = 10.8 \qquad \mathrm{Var}(X) = 24 \times 0.45 \times 0.55 \times \frac{300-24}{300-1} \approx 5.48$$

3) Comme le nombre d'élèves de l'école ($N = 300$) est très supérieur (10 fois supérieur) au nombre d'enfants de CP ($n = 24$), on peut considérer le tirage comme étant avec remises, soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(24, 0.45)$.

4) En utilisant cette approximation, calculer la probabilité que
- **a)** aucun élève de CP mange à la cantine : $P(X = 0) = \binom{24}{0}0.45^0 0.55^{24} \approx 0$.
- **b)** au moins un élève de CP mange à la cantine : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1$.
- **c)** la moitié des élèves de CP mange à la cantine : $P(X = 12) = \binom{24}{12}0.45^{12}0.55^{12} \approx 0.1429$.

Exercice IV (35 min, 5 points)
Monsieur Papressé peut prendre deux routes différentes pour se rendre à son travail. Lorsqu'il utilise la première route, la durée du trajet est en moyenne de 30 minutes avec un écart-type de 5 minutes. On suppose que la durée du trajet X suit une loi normale.

1) On a $X \hookrightarrow \mathcal{N}(30, 5)$.

2) La probabilité que la durée du trajet soit supérieure à 35 minutes est

$$P(X > 35) = 1 - P(X \leq 35) = 1 - P(X^* \leq \tfrac{35-30}{5}) = 1 - P(X^* \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

3) La probabilité que la durée du trajet soit inférieure à 20 minutes est

$$P(X \leq 20) = P(X^* \leq \tfrac{20-30}{5}) = P(X^* \leq -2) = 1 - P(X^* \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

4) La probabilité que la durée du trajet soit comprise entre 20 et 35 minutes est

$$P(20 \leq X \leq 35) = P(X \leq 35) - P(X \leq 20) = (1 - 0.1587) - 0.0228 = 0.8185$$

5) En empruntant la seconde route, la durée Y du trajet est en moyenne de 25 minutes avec un écart-type de 8 minutes et suit aussi une loi normale. Sachant que Monsieur Papressé dispose de 38 minutes pour se rendre à son travail, quel trajet doit-il prendre pour avoir la probabilité la plus forte d'être à l'heure à son travail ?
On a $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(25, 8)$. La probabilité d'être à l'heure à son travail en empruntant la seconde route est

$$P(Y \leq 38) = P(Y^* \leq \frac{38-25}{8}) = P(Y^* \leq 1.625) = 0.9479$$

De même, la probabilité d'être à l'heure à son travail en empruntant la première route est

$$P(X \leq 38) = P(X^* \leq \frac{38-30}{5}) = P(X^* \leq 1.6) = 0.9452$$

Donc, Monsieur Papressé doit prendre le second trajet.