Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Statistiques et probabilités **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

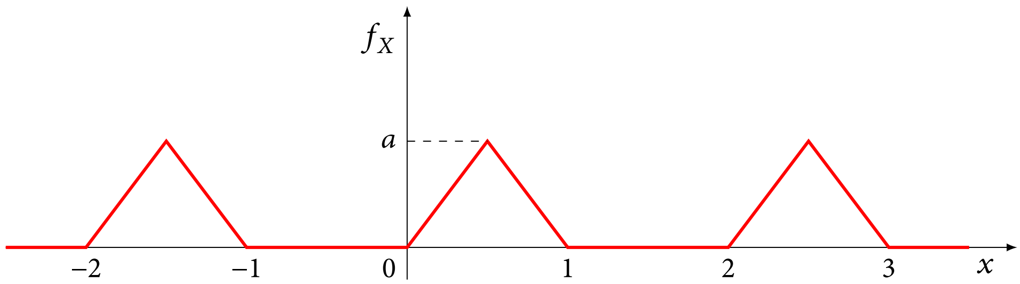
Question de cours (15 min, 3 points)
Soit X une variable aléaloire *continue*.

1) Rappeler la définition de la fonction de répartition F_X de X.

2) Rappeler la définition de la densité f_X de X.

3) Donner la formule permettant de calculer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ de X.

Exercice I (30 min, 4 points)
On considère une variable aléatoire continue X de densité f_X représentée ci-dessous :



1) Vérifier que le graphe ci-dessus correspond bien à une densité pour une valeur de a à déterminer.

2) En justifiant graphiquement vos réponses, déterminer les probabilités suivantes :
  a) $P(X < 0)$, $P(X > 3)$
  b) $P(-1 \leqslant X \leqslant 0)$
  c) $P(0 \leqslant X \leqslant 3)$

3) Déterminer graphiquement l'espérance de X.

4) Expliquer pourquoi $\sigma_X \leqslant 2.5$.

Exercice II (20 min, 4 points)
Les 65 trains s'arrêtant quotidiennement dans une gare sont pour 40 % d'entre-eux des TGV, pour 35 % des trains express régionaux (TER) et pour 25 % des trains Intercités. Le chef de gare a observé que 3 % des TGV étaient en retard, de même que 6 % des TER et 10 % des Intercités.

1) Retranscrire l'énoncé ci-dessus en utilisant des événements et des probabilités.

2) Calculer la probabilité qu'un train s'arrêtant dans cette gare soit en retard.

3) Quelle est la probabilité qu'un train arrivé en retard soit un TGV ?

Exercice III (20 min, 4 points)

Parmi les 300 élèves d'une école élémentaire de la ville, 135 mangent à la cantine. Soit X le nombre d'élèves mangeant à la cantine parmi les 24 élèves de CP.

1) Déterminer la loi de X.

2) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

3) Montrer que l'on peut rapprocher la loi de X par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

4) En utilisant cette approximation, calculer la probabilité que

- **a)** aucun élève de CP mange à la cantine ;
- **b)** au moins un élève de CP mange à la cantine ;
- **c)** la moitié des élèves de CP mange à la cantine.

Exercice IV (35 min, 5 points)

Monsieur Papressé peut prendre deux routes différentes pour se rendre à son travail. Lorsqu'il utilise la première route, la durée du trajet est en moyenne de 30 minutes avec un écart-type de 5 minutes. On suppose que la durée du trajet X suit une loi normale.

1) Quelle est la loi suivie par X ?

2) Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit supérieure à 35 minutes ?

3) Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit inférieure à 20 minutes ?

4) Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit comprise entre 20 et 35 minutes ?

5) En empruntant la seconde route, la durée Y du trajet est en moyenne de 25 minutes avec un écart-type de 8 minutes et suit aussi une loi normale. Sachant que Monsieur Papressé dispose de 38 minutes pour se rendre à son travail, quel trajet doit-il prendre pour avoir la probabilité la plus forte d'être à l'heure à son travail ?

Récapitulatif des lois discrètes

Loi	Notation	Support	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathscr{B}(1,p)$	$X(\Omega)=\{0,1\}$	$P(X=0)=q \quad P(X=1)=p$	$\mathrm{E}(X)=p$	$\mathrm{Var}(X)=pq$
Binomiale	$\mathscr{B}(n,p)$	$X(\Omega)=\{0,\dots,n\}$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$	$\mathrm{E}(X)=np$	$\mathrm{Var}(X)=npq$
Hypergéométrique	$\mathscr{H}(N,n,p)$	$X(\Omega)\subset\{0,\dots,n\}$	$P(X=k)=\dfrac{\binom{Np}{k}\times\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\mathrm{E}(X)=np$	$\mathrm{Var}(X)=npq\dfrac{N-n}{N-1}$
Géométrique	$\mathscr{G}(p)$	$X(\Omega)=\mathbb{N}^*$	$P(X=k)=pq^{k-1}$	$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{p}$	$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{q}{p^2}$
Pascal	Pascal(r,p)	$X(\Omega)=\{r,r+1,\dots\}$	$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^rq^{k-r}$	$\mathrm{E}(X)=\dfrac{r}{p}$	$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{rq}{p^2}$
Poisson	$\mathscr{P}(\lambda)$	$X(\Omega)=\mathbb{N}$	$P(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	$\mathrm{E}(X)=\lambda$	$\mathrm{Var}(X)=\lambda$

$p\in[0,1] \qquad q=1-p \qquad n,N,r\in\mathbb{N}^* \qquad \lambda>0$

Récapitulatif des lois continues

Loi	Notation	Support	Loi/Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathscr{U}(a,b)$	$X(\Omega)=[a,b]$	$f_X(x)=\dfrac{1}{b-a}$ si $x\in[a,b]$	$\mathrm{E}(X)=\dfrac{a+b}{2}$	$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathscr{E}(\lambda)$ $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$X(\Omega)=[0,+\infty[$	$f_X(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ si $x\geqslant 0$	$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{\lambda}$	$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathscr{N}(\mu,\sigma)$	$X(\Omega)=\mathbb{R}$	$f_X(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathrm{E}(X)=\mu$	$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$
Normale standard (Z)	$\mathscr{N}(0,1)$	$Z(\Omega)=\mathbb{R}$	$f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-z^2/2}$	$\mathrm{E}(Z)=0$	$\mathrm{Var}(Z)=1$
Khi-deux (K^2)	$\chi^2(n)$	$K^2(\Omega)=[0,+\infty[$	$K^2=\sum_{i=1}^n Z_i^2$ où $Z_i\hookrightarrow\mathscr{N}(0,1)$ ind.	$\mathrm{E}(K^2)=n$	$\mathrm{Var}(K^2)=2n$
Student (T)	$St(n)$	$T(\Omega)=\mathbb{R}$	$T=\dfrac{Z}{\sqrt{K^2/n}}$ où $\begin{cases}Z\hookrightarrow\mathscr{N}(0,1)\\K^2\hookrightarrow\chi^2(n)\end{cases}$ ind.	$\mathrm{E}(T)=0$	$\mathrm{Var}(T)=\dfrac{n}{n-2}$
Fisher (F)	$F(n_1,n_2)$	$F(\Omega)=[0,+\infty[$	$F=\dfrac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2}$ où $\begin{cases}K_1^2\hookrightarrow\chi^2(n_1)\\K_2^2\hookrightarrow\chi^2(n_2)\end{cases}$ ind.	$\mathrm{E}(F)=\dfrac{n_2}{n_2-2}$	$\mathrm{Var}(F)=\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

$a,b\in\mathbb{R} \qquad a<b \qquad \lambda>0 \qquad \mu\in\mathbb{R} \qquad \sigma>0 \qquad n,n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$

Fonction de répartition de la loi normale standard

$$P(\mathcal{N}(0,1) \leqslant z)$$

Exemple : $P\big(\mathcal{N}(0,1) \leqslant 1.33\big) = 0.9082$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998