

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021

Session 1

Semestre 4

Licence Economie-Gestion – 2^e année

Matière : Statistiques et probabilités

Durée : 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Problème

Chaque année, la Chambre de commerce et d'industrie (CCI) de Limoges et de la Haute-Vienne publie le « baromètre officiel mensuel de l'activité hôtelière et para-hôtelière de la Haute-Vienne ». Ce sujet est librement inspiré du baromètre de l'année 2019 disponible sur le site www.limoges.cci.fr.

Pour l'année 2019, le prix moyen d'une chambre (d'hôtel) en Haute-Vienne est établi à 63.10 € avec un écart-type de 9 €. Dans la suite, on supposera que le prix d'une chambre suit une loi normale.

Partie I (25 min, 4,5 points)

Une enquête (fictive) du mois d'avril 2020, basée sur un échantillon de 25 hôtels, donne les résultats suivants :

```
Stata. summarize prix
```

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
prix	25	66.76	10.53281	42	85

- 1) Donner le modèle statistique (population, variable, échantillon, paramètre) correspondant.
- 2) Donner un estimateur du prix moyen (d'une chambre d'hôtel) en précisant ses propriétés.
- 3) Commenter la sortie STATA ci-dessus.
- 4) Donner un intervalle de confiance à 95 % du prix moyen.
- 5) Commenter, en allant au-delà de la simple lecture du tableau, la sortie STATA suivante :

```
Stata. mean prix, level(90)
```

Mean estimation		Number of obs = 25	
	Mean	Std. Err.	[90% Conf. Interval]
prix	66.76	2.106561	63.15592 70.36408

Partie II (25 min, 4,5 points)

Tout d'abord, on souhaite vérifier que les écarts de prix n'ont pas augmenté (par rapport à 2019).

- 1) Donner un estimateur de la variance des prix. En déduire une estimation de l'écart-type des prix.
- 2) Construire un test avec un risque de première espèce de 5 % permettant de vérifier l'hypothèse ci-dessus. Quelle est votre conclusion ?
- 3) Commenter, en allant au-delà de la simple lecture du tableau, la sortie R suivante :

```
R> VarTest(hotels$prix, sigma.squared=9^2)

One Sample Chi-Square test on variance

data: hotels$prix
X-squared = 32.871, df = 24, p-value = 0.2136
alternative hypothesis: true variance is not equal to 81
95 percent confidence interval:
 67.63934 214.70266
sample estimates:
variance of x
 110.94
```

- 4) Que doit-on penser des écarts des prix ?

Partie III (35 min, 6 points)

On souhaite à présent vérifier que le prix moyen n'a pas significativement augmenté depuis 2019.

- 1) Préciser, en les justifiant, les hypothèses du test.
- 2) Construire un test avec un risque de 5 % et conclure. Quel risque effectif prenez-vous ?
- 3) Calculer (approximativement) la probabilité critique associée au test.
- 4) Que devient la conclusion du test si on prend un risque de première espèce de 1 % ?
- 5) Commenter la sortie SPSS suivante. Confirmez-vous vos calculs ?

One-Sample Test

Test Value = 63.10						
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
prix	1,737	24	,095	3,660	-,69	8,01

Partie IV (35 min, 5 points)

En 2019, le baromètre de l'activité hôtelière établissait à 64.4 % le taux d'occupation des chambres des hôtels de la Haute-Vienne (nombre de chambres louées / nombre total de chambres). L'enquête du mois d'avril 2020, réduite à 12 hôtels, montre que sur 852 chambres disponibles, 528 étaient louées.

- 1) On souhaite estimer le taux d'occupation pour le mois d'avril 2020.
 - a) Décrire le modèle statistique (population, variable, loi, paramètre).
 - b) Donner un estimateur du taux d'occupation. En déduire une estimation de ce taux.
 - c) Quelle est la marge d'erreur (d'échantillonnage) à 95 % de cette estimation ?
- 2) En commentant la sortie SAS suivante, que doit-on penser de l'évolution du taux d'occupation ?

The FREQ Procedure

Louée	Frequency	Percent
0	324	38.03
1	528	61.97

Binomial Proportion	
Louée = 1	
Proportion (P)	0.6197
ASE	0.0166

Confidence Limits for the Binomial Proportion		
Proportion = 0.6197		
Type	95% Confidence Limits	
Agresti-Coull	0.5866	0.6517
Clopper-Pearson (Exact)	0.5862	0.6524
Jeffreys	0.5868	0.6519
Wald	0.5871	0.6523
Wilson	0.5867	0.6517

Test of H0: Proportion = 0.644	
ASE under H0	0.0164
Z	-1.4802
One-sided Pr < Z	0.0694
Two-sided Pr > Z	0.1388
Exact Test	
One-sided Pr <= P	0.0748
Two-sided = 2 * One-sided	0.1496

Sample Size = 852

Récapitulatif des lois discrètes

Loi	Notation	Support	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(1, p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$	$P(X = 0) = q \quad P(X = 1) = p$	$E(X) = p$	$\text{Var}(X) = pq$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq$
Hypergéométrique	$\mathcal{H}(N, n, p)$	$X(\Omega) \subset \{0, \dots, n\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \times \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	$P(X = k) = pq^{k-1}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$
Pascal	$\text{Pascal}(r, p)$	$X(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$E(X) = \frac{r}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$	$\text{Var}(X) = \lambda$

$$p \in [0, 1] \quad q = 1 - p \quad n, N, r \in \mathbb{N}^* \quad \lambda > 0$$

Récapitulatif des lois continues

Loi	Notation	Support	Loi/Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathcal{U}(a, b)$	$X(\Omega) = [a, b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{si } x \in [a, b]$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$ $\text{Exp}(\lambda)$	$X(\Omega) = [0, +\infty[$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{si } x \geq 0$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$X(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$E(X) = \mu$	$\text{Var}(X) = \sigma^2$
Normale standard (Z)	$\mathcal{N}(0, 1)$	$Z(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$	$E(Z) = 0$	$\text{Var}(Z) = 1$
Khi-deux (K^2)	$\chi^2(n)$	$K^2(\Omega) = [0, +\infty[$	$K^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \quad \text{où } Z_i \leftrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ ind.}$	$E(K^2) = n$	$\text{Var}(K^2) = 2n$
Student (T)	$St(n)$	$T(\Omega) = \mathbb{R}$	$T = \frac{Z}{\sqrt{K^2/n}} \quad \text{où } \begin{cases} Z \leftrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ K^2 \leftrightarrow \chi^2(n) \end{cases} \text{ ind.}$	$E(T) = 0$	$\text{Var}(T) = \frac{n}{n-2}$
Fisher (F)	$F(n_1, n_2)$	$F(\Omega) = [0, +\infty[$	$F = \frac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2} \quad \text{où } \begin{cases} K_1^2 \leftrightarrow \chi^2(n_1) \\ K_2^2 \leftrightarrow \chi^2(n_2) \end{cases} \text{ ind.}$	$E(F) = \frac{n_2}{n_2-2}$	$\text{Var}(F) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \quad \lambda > 0 \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \sigma > 0 \quad n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$$

Fonction de répartition de la loi normale standard

$$P(\mathcal{N}(0, 1) \leq z)$$

Exemple : $P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 1.33) = 0.9082$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Quantiles de la loi de Student

$$P(St(n) \leq t_\alpha) = \alpha$$

Exemple : $P(St(11) \leq 2.201) = 0.975$

n\α	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3	636.6
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.33	31.60
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21	12.92
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	0.126	0.255	0.388	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80	0.126	0.254	0.387	0.526	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
90	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
110	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.659	1.982	2.361	2.621	3.166	3.381
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
130	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.041	1.288	1.657	1.978	2.355	2.614	3.154	3.367
140	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.040	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149	3.361
150	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.040	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609	3.145	3.357
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Quantiles de la loi du Khi-deux

$$P(\chi^2(n) \leq k_\alpha^2) = \alpha$$

Exemple : $P(\chi^2(15) \leq 22.31) = 0.90$

$n \backslash \alpha$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25	0.4	0.5	0.6	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.275	0.455	0.708	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.022	1.386	1.833	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	1.869	2.366	2.946	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	2.753	3.357	4.045	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	3.655	4.351	5.132	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	4.570	5.348	6.211	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	5.493	6.346	7.283	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	6.423	7.344	8.351	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	7.357	8.343	9.414	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	8.295	9.342	10.47	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	9.237	10.34	11.53	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	10.18	11.34	12.58	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	11.13	12.34	13.64	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	12.08	13.34	14.69	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	13.03	14.34	15.73	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	13.98	15.34	16.78	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	14.94	16.34	17.82	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	15.89	17.34	18.87	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	16.85	18.34	19.91	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	17.81	19.34	20.95	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	18.77	20.34	21.99	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	19.73	21.34	23.03	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	20.69	22.34	24.07	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	21.65	23.34	25.11	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	22.62	24.34	26.14	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	23.58	25.34	27.18	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	24.54	26.34	28.21	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	25.51	27.34	29.25	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	26.48	28.34	30.28	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	27.44	29.34	31.32	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	37.13	39.34	41.62	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	46.86	49.33	51.89	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	56.62	59.33	62.13	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	66.40	69.33	72.36	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	76.19	79.33	82.57	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	85.99	89.33	92.76	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	95.81	99.33	102.9	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
110	75.55	78.46	82.87	86.79	91.47	99.67	105.6	109.3	113.1	119.6	129.4	135.5	140.9	147.4	151.9
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	109.2	115.5	119.3	123.3	130.1	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6
130	92.22	95.45	100.3	104.7	109.8	118.8	125.3	129.3	133.4	140.5	151.0	157.6	163.5	170.4	175.3
140	100.7	104.0	109.1	113.7	119.0	128.4	135.1	139.3	143.6	150.9	161.8	168.6	174.6	181.8	186.8
150	109.1	112.7	118.0	122.7	128.3	138.0	145.0	149.3	153.8	161.3	172.6	179.6	185.8	193.2	198.4
200	152.2	156.4	162.7	168.3	174.8	186.2	194.3	199.3	204.4	213.1	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3