Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Statistiques et probabilités – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (25 min, 3.5 points)
Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) La fonction f_X est positive ($3x^2 \geqslant 0$) ou nulle. Elle est continue sauf en 1. De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_0^1 = 1$$

2) On a

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^3\right]_0^1 = \frac{3}{4} \qquad \mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

D'où $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 3/80$.

3) On a

$$P(-0.5 < X < +0.5) = \int_{-0.5}^{+0.5} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{0.5} 3x^2\,\mathrm{d}x = \left[x^3\right]_0^{0.5} = 1/8$$

Exercice II (20 min, 3.5 points)
Les 70 trains s'arrêtant quotidiennement dans une gare sont pour 50 % d'entre-eux des trains express régionaux (TER), pour 30 % des trains Intercités, et pour 20 % des trains TGV. Le chef de gare a observé que 6 % des TER étaient en retard, de même que 5 % des Intercités et 2.5 % des TGV.

1) On considère l'expérience aléatoire qui consiste à « choisir un train au hasard ». L'univers des possible Ω est donc l'ensemble des trains s'arrêtant dans cette gare. La tirage étant aléatoire, chaque train a la même probabilité d'être choisi. On fait donc l'hypothèse d'équi-probabilité. On note R l'événement « le train est en retard », et TER, INT et TGV l'événement correspondant à chaque type de train. On a

$$P(TER) = 0.50 \quad P(R|TER) = 0.06 \quad P(INT) = 0.30 \quad P(R|INT) = 0.05 \quad P(TGV) = 0.20 \quad P(R|TGV) = 0.025$$

2) D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(R) = P(R|TER) \times P(TER) + P(R|INT) \times P(INT) + P(R|TGV) \times P(TGV) = 0.06 \times 0.50 + 0.05 \times 0.30 + 0.025 \times 0.20 = 0.05$$

3) D'après la formule de Bayes, on a

$$P(TER|R) = \frac{P(R|TER) \times P(TER)}{P(R)} = \frac{0.06 \times 0.50}{0.05} = 0.6 = 60\ \%$$

Exercice III (30 min, 5 points)

Un opérateur de téléphonie mobile assure que 90 % des appels téléphoniques aboutissent.

1) Soit X le nombre d'appels ayant abouti parmi 8 appels effectués.

a) On peut considérer qu'un appel correspond à un tirage aléatoire avec remise parmi les appels aboutissants ou non. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(8, 0.90)$. On a alors $\mathrm{E}(X) = 8 \times 0.9 = 7.2$ et $\mathrm{Var}(X) = 8 \times 0.9 \times 0.1 = 0.72$.

b) La probabilité qu'un seul appel ait échoué correspond à la probabilité que 7 appels (sur 8) aient abouti. Donc

$$P(X = 7) = \binom{8}{7} 0.90^7 \times 0.10^1 = 0.3826$$

c) La probabilité qu'au plus un appel ait échoué correspond à la probabilité que 7 ou plus appels aient abouti. Donc

$$P(X \geqslant 7) = P(X = 7) + P(X = 8) = 0.3826 + \binom{8}{8} 0.90^8 \times 0.10^0 = 0.8131$$

2) Soit Y le nombre de tentatives nécessaires pour qu'un appel aboutisse.

a) On a $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(0.9)$. D'où $\mathrm{E}(X) = 1/0.90 = 1.11$ et $\mathrm{Var}(X) = 0.1/0.9^2 = 0.1235$.

b) La probabilité qu'un appel aboutisse en au plus 2 tentatives est

$$P(Y \leqslant 2) = P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0.9 + 0.9 \times 0.1 = 0.99$$

Exercice IV (30 min, 5 points)

Durant les fêtes de fin d'année, le volume des ventes (en kilogrammes) de chocolats d'un artisan-chocolatier est en moyenne de 400 Kg avec un écart-type de 50 Kg. On suppose que le volume des ventes X suit une loi normale.

1) Pour les fêtes 2014, l'artisan prévoit de produire 500 Kg de chocolats.

a) On sait que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(400, 50)$. La probabilité qu'il puisse répondre à la demande est donc

$$P(X \leqslant 500) = P\left(\frac{X - 400}{50} \leqslant \frac{500 - 400}{50}\right) = P(X^* \leqslant 2) = 0.9772$$

b) La probabilité qu'il vende toute sa production est

$$P(X \geqslant 500) = 1 - P(X \leqslant 500) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

2) On note K la production que l'artisan soit prévoir pour répondre à la demande avec une probabilité de 0.99. On a donc

$$P(X \leqslant K) = 0.99 \iff P\left(\frac{X - 400}{50} \leqslant \frac{K - 400}{50}\right) = 0.99$$

Donc

$$\frac{K - 400}{50} = z_{0.99} = 2.33 \implies K = 400 + 2.33 \times 50 = 516.50$$