Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Statistiques et probabilités **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (15 min, 3 points)
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes.

1) Rappeler la définition de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire. Que mesurent-ils ?

2) Comment définit-on l'indépendance de X et Y ? Quelle est son interprétation ?

3) Quel est le rapport entre l'indépendance et la corrélation ?

Exercice I (25 min, 3.5 points)
Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Vérifier que f_X est bien une densité.

2) Calculer l'espérance et la variance de X.

3) Calculer la probabilité suivante : $P(-0.5 < X < +0.5)$.

Exercice II (20 min, 3.5 points)
Les 70 trains s'arrêtant quotidiennement dans une gare sont pour 50 % d'entre-eux des trains express régionaux (TER), pour 30 % des trains Intercités, et pour 20 % des trains TGV. Le chef de gare a observé que 6 % des TER étaient en retard, de même que 5 % des Intercités et 2.5 % des TGV.

1) Retranscrire l'énoncé ci-dessus en utilisant des événements et des probabilités.

2) Calculer la probabilité qu'un train s'arrêtant dans cette gare soit en retard.

3) Quelle est la probabilité qu'un train arrivé en retard soit un TER ?

Exercice III (30 min, 5 points)
Un opérateur de téléphonie mobile assure que 90 % des appels téléphoniques aboutissent.

1) Soit X le nombre d'appels ayant abouti parmi 8 appels effectués.
  a) Déterminer la loi de X, donner son espérance et sa variance.
  b) Calculer la probabilité qu'un seul appel ait échoué.
  c) Calculer la probabilité qu'au plus un appel ait échoué.

2) Soit Y le nombre de tentatives nécessaires pour qu'un appel aboutisse.
  a) Déterminer la loi de Y, donner son espérance et sa variance.
  b) Calculer la probabilité qu'un appel aboutisse en au plus 2 tentatives.

Exercice IV (30 min, 5 points)

Durant les fêtes de fin d'année, le volume des ventes (en kilogrammes) de chocolats d'un artisan-chocolatier est en moyenne de 400 Kg avec un écart-type de 50 Kg. On suppose que le volume des ventes X suit une loi normale.

1) Pour les fêtes 2014, l'artisan prévoit de produire 500 Kg de chocolats.

a) Quelle est la probabilité qu'il puisse répondre à la demande ?

b) Quelle est la probabilité qu'il vende toute sa production ?

2) Quelle production doit-il prévoir pour répondre à la demande avec une probabilité de 0.99 ?

Récapitulatif des lois discrètes

Loi	Notation	Support	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(1,p)$	$X(\Omega)=\{0,1\}$	$P(X=0)=q \quad P(X=1)=p$	$\mathrm{E}(X)=p$	$\mathrm{Var}(X)=pq$
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$X(\Omega)=\{0,\dots,n\}$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$	$\mathrm{E}(X)=np$	$\mathrm{Var}(X)=npq$
Hypergéométrique	$\mathcal{H}(N,n,p)$	$X(\Omega)\subset\{0,\dots,n\}$	$P(X=k)=\dfrac{\binom{Np}{k}\times\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\mathrm{E}(X)=np$	$\mathrm{Var}(X)=npq\dfrac{N-n}{N-1}$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$X(\Omega)=\mathbb{N}^*$	$P(X=k)=pq^{k-1}$	$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{p}$	$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{q}{p^2}$
Pascal	$\mathrm{Pascal}(r,p)$	$X(\Omega)=\{r,r+1,\dots\}$	$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}$	$\mathrm{E}(X)=\dfrac{r}{p}$	$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{rq}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega)=\mathbb{N}$	$P(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	$\mathrm{E}(X)=\lambda$	$\mathrm{Var}(X)=\lambda$

$p\in[0,1] \qquad q=1-p \qquad n,N,r\in\mathbb{N}^* \qquad \lambda>0$

Récapitulatif des lois continues

Loi	Notation	Support	Loi/Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathcal{U}(a,b)$	$X(\Omega)=[a,b]$	$f_X(x)=\dfrac{1}{b-a} \quad \text{si} \quad x\in[a,b]$	$\mathrm{E}(X)=\dfrac{a+b}{2}$	$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$ $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$X(\Omega)=[0,+\infty[$	$f_X(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} \quad \text{si} \quad x\geqslant 0$	$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{\lambda}$	$\mathrm{Var}(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(\mu,\sigma)$	$X(\Omega)=\mathbb{R}$	$f_X(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathrm{E}(X)=\mu$	$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$
Normale standard (Z)	$\mathcal{N}(0,1)$	$Z(\Omega)=\mathbb{R}$	$f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-z^2/2}$	$\mathrm{E}(Z)=0$	$\mathrm{Var}(Z)=1$
Khi-deux (K^2)	$\chi^2(n)$	$K^2(\Omega)=[0,+\infty[$	$K^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2 \quad \text{où} \quad Z_i\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)$ ind.	$\mathrm{E}(K^2)=n$	$\mathrm{Var}(K^2)=2n$
Student (T)	$St(n)$	$T(\Omega)=\mathbb{R}$	$T=\dfrac{Z}{\sqrt{K^2/n}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} Z\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1) \\ K^2\hookrightarrow\chi^2(n)\end{cases}$ ind.	$\mathrm{E}(T)=0$	$\mathrm{Var}(T)=\dfrac{n}{n-2}$
Fisher (F)	$F(n_1,n_2)$	$F(\Omega)=[0,+\infty[$	$F=\dfrac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2} \quad \text{où} \quad \begin{cases} K_1^2\hookrightarrow\chi^2(n_1) \\ K_2^2\hookrightarrow\chi^2(n_2)\end{cases}$ ind.	$\mathrm{E}(F)=\dfrac{n_2}{n_2-2}$	$\mathrm{Var}(F)=\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

$a,b\in\mathbb{R} \qquad a<b \qquad \lambda>0 \qquad \mu\in\mathbb{R} \qquad \sigma>0 \qquad n,n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$

Fonction de répartition de la loi normale standard

$$P(\mathcal{N}(0,1) \leqslant z)$$

Exemple : $P\big(\mathcal{N}(0,1) \leqslant 1.33\big) = 0.9082$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998