Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Statistiques et probabilités – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (20 min, 4 points)
Une société de VPC emploie trois transporteurs A, B et C pour faire livrer ses colis. Elle utilise le transporteur A la moitié du temps et une fois sur 4 chacun des deux autres. Chaque transporteur égare respectivement 1 %, 2 % et 4 % des colis qui lui sont confiés.

1) L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard un colis, soit $\Omega = \{\text{colis}\}$. En faisant l'hypothèse d'équiprobabilité, $P(A) = \text{Card } A / \text{ Card } \Omega$. Si on note A l'événement « le colis est transporté par le transporteur A », idem pour B et C, on a $P(A) = 0.50$, $P(B) = 0.25$, $P(C) = 0.25$. En notant E l'événement « le colis a été égaré », on a $P(E|A) = 0.01$, $P(E|B) = 0.02$ et $P(E|C) = 0.04$.

2) En utilisant la formule des probabilités totale, la probabilité qu'un colis soit égaré est

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) = 0.01 \times 0.50 + 0.02 \times 0.25 + 0.04 \times 0.25 = 0.02 = 2\ \%$$

3) En utilisant la formule de Bayes, la probabilité que le transporteur C soit responsable de la perte d'un colis est

$$P(C|E) = \frac{P(E|C)P(C)}{P(E)} = \frac{0.04 \times 0.25}{0.02} = 0.50 = 50\ \%$$

Exercice II (30 min, 5 points)
Un opérateur de téléphonie mobile assure que 80 % des appels téléphoniques aboutissent.

1) Un appel téléphonique peut être assimilé à un tirage avec remise. La probabilité qu'il aboutisse est $p = 0.80$.

a) Le nombre d'appels ayant abouti parmi 9 appels effectués suit donc une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(9, 0.8)$. On a $\text{E}(X) = np = 9 \times 0.80 = 7.2$ et $\text{Var}(X) = npq = 9 \times 0.80 \times 0.20 = 1.44$.

b) La probabilité qu'un seul appel ait échoué correspond à la probabilité que 8 appels aient abouti, c'est-à-dire,

$$P(X = 8) = \binom{9}{8} 0.8^8 0.2^1 \approx 30.2\ \%$$

c) La probabilité qu'au plus un appel ait échoué correspond à la probabilité qu'au moins 8 appels aient abouti, soit

$$P(X \geqslant 8) = P(X = 8) + P(X = 9) \approx 0.302 + \binom{9}{9} 0.8^9 0.2^0 = 0.302 + 0.134 = 43.6\ \%$$

2) Soit Y le nombre de tentatives nécessaires pour qu'un appel aboutisse.

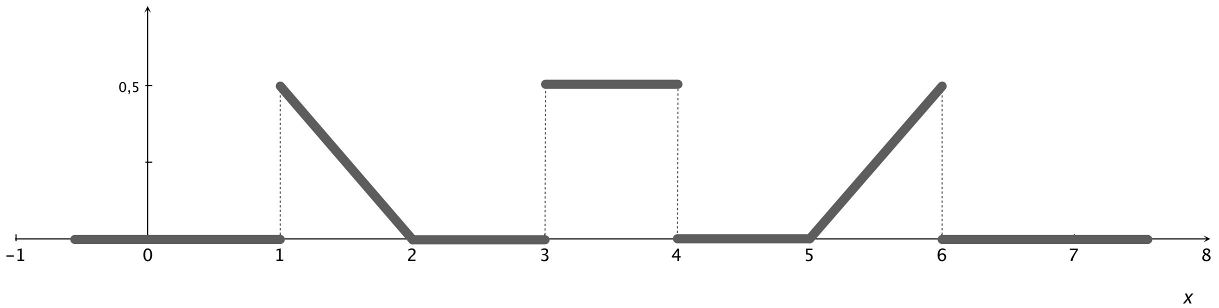
a) Il s'agit de tirages avec remises jusqu'à ce que l'appel aboutisse. La variable Y suit donc une loi géométrique $\mathcal{G}(0.8)$. D'où $\text{E}(Y) = 1/0.8 = 1.25$ et $\text{Var}(X) = 0.2/0.8^2 = 0.3125$.

b) La probabilité qu'un appel aboutisse en au plus 2 tentatives est

$$P(Y \leqslant 2) = P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0.8 + 0.8 \times 0.2 = 0.96 = 96\ \%$$

Exercice III (20 min, 4 points)

On considère une variable aléatoire continue X de densité f_X représentée ci-dessous :



1) Le graphe correspond à une fonction positive (graphe au dessus de l'axe des x), continue sauf en $x = 1$, $x = 3$, $x = 4$ et $x = 6$. De plus, l'intégrale de f_X est égale à 1, puisqu'elle correspond à l'aire de deux triangles et d'un rectangle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{0.5 \times (2-1)}{2} + 0.5 \times (4-3) + \frac{0.5 \times (6-5)}{2} = 1$$

La fonction f_X est donc bien une densité.

2) On a

- **a)** $P(X < 1) = P(X > 6) = 0$ (aire nulle)
- **b)** $P(3 \leqslant X \leqslant 4) = 0.50$ (aire du rectangle central)
- **c)** $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = 0.25$ (aire du premier triangle)
- **d)** $P(3 \leqslant X \leqslant 7) = 0.75$ (aire du rectangle et du second triangle)
- **e)** $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = 0.50$ (aire du rectangle central)

3) La densité étant symétrique, la médiane est égale à l'espérance et correspond à $x = 3.5$, axe de symétrie. D'où $\mathrm{E}(X) = 3.5$.

4) On a

$$1 \leqslant X \leqslant 6 \implies 1 - 3.5 \leqslant X - \mathrm{E}(X) \leqslant 6 - 3.5 \implies |X - \mathrm{E}(X)| \leqslant 2.5 \implies \sigma_X \leqslant 2.5$$

Exercice IV (30 min, 5 points)

On a observé que la vitesse X des automobilistes roulant sur une route départementale suit une loi normale $\mathcal{N}(80, 15)$.

1) $X \hookrightarrow \mathcal{N}(80, 15)$, donc $\mathrm{E}(X) = 80$ et $\mathrm{Var}(X) = 15^2 = 225$.

2) La probabilité que la vitesse d'un automobiliste soit

- **a)** supérieure à 90 km/h est

$$P(X \geqslant 90) = 1 - P\left(X^* \leqslant \frac{90-80}{15}\right) = 1 - P(X^* \leqslant 0.667) = 1 - 0.7486 = 0.2514$$

- **b)** inférieure à 60 km/h est

$$P(X \leqslant 60) = P\left(X^* \leqslant \frac{60-80}{15}\right) = P(X^* \leqslant -1.33) = 1 - P(X^* \leqslant 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

- **c)** comprise entre 60 et 90 km/h est

$$P(60 \leqslant X \leqslant 90) = P(X \leqslant 90) - P(X \leqslant 60) = 0.7486 - 0.0918 = 0.6568$$

3) On cherche la vitesse maximale M telle que $P(X \geqslant M) = 0.10$. D'où

$$P\left(X^* \leqslant \frac{M-80}{15}\right) = 0.90 \implies \frac{M-80}{15} = z_{90} = 1.285 \implies M = 80 + 1.285 \times 15 = 99.27$$

La vitesse maximale tolérée doit donc être de presque 100 km/h, ce qui ne semble pas très réaliste !