Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020**

**Session 1** **Semestre 3**

# Licence Economie-Gestion – 2e année

**Matière :** Statistiques et probabilités **Durée :** 2 heures
**Enseignant :** Vincent Jalby

**Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.**

**Question de cours** (20 min, 2 points)
Soit $X$ une variable aléaloire *continue*.

**1)** Rappeler la définition de la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

**2)** Rappeler la définition de la densité $f_X$ de $X$.

**3)** Donner la formule permettant de calculer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ de $X$.

**Exercice I** (20 min, 4 points)
Une société de VPC emploie trois transporteurs A, B et C pour faire livrer ses colis. Elle utilise le transporteur A la moitié du temps et une fois sur 4 chacun des deux autres. Chaque transporteur égare respectivement 1 %, 2 % et 4 % des colis qui lui sont confiés.

**1)** Modéliser l'énoncé avec des événements et des probabilités.

**2)** Calculer la probabilité qu'un colis se perde.

**3)** Un client se plaint de n'avoir pas reçu sa commande. Quelle est la probabilité que le transporteur C soit responsable ?

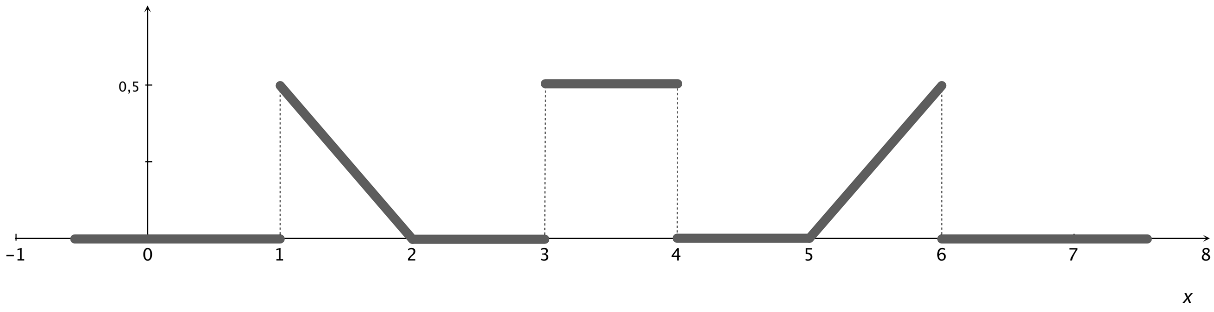
**Exercice II** (30 min, 5 points)
Un opérateur de téléphonie mobile assure que 80 % des appels téléphoniques aboutissent.

**1)** Soit $X$ le nombre d'appels ayant abouti parmi 9 appels effectués.
- **a)** Déterminer la loi de $X$, donner son espérance et sa variance.
- **b)** Calculer la probabilité qu'un seul appel ait échoué.
- **c)** Calculer la probabilité qu'au plus un appel ait échoué.

**2)** Soit $Y$ le nombre de tentatives nécessaires pour qu'un appel aboutisse.
- **a)** Déterminer la loi de $Y$, donner son espérance et sa variance.
- **b)** Calculer la probabilité qu'un appel aboutisse en au plus 2 tentatives.

**Exercice III** (20 min, 4 points)

On considère une variable aléatoire continue $X$ de densité $f_X$ représentée ci-dessous :




**1)** Vérifier que le graphe ci-dessus correspond bien à une densité.

**2)** En justifiant graphiquement vos réponses, déterminer les probabilités suivantes :

**a)** $P(X < 1)$, $P(X > 6)$

**b)** $P(3 \leqslant X \leqslant 4)$

**c)** $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$

**d)** $P(3 \leqslant X \leqslant 7)$

**e)** $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$

**3)** Déterminer graphiquement l'espérance de $X$.

**4)** Expliquer pourquoi $\sigma_X < 2.5$.

**Exercice IV** (30 min, 5 points)

On a observé que la vitesse $X$ des automobilistes roulant sur une route départementale suit une loi normale $\mathcal{N}(80, 15)$.

**1)** Donner l'espérance et la variance de $X$.

**2)** Quelle est la probabilité que la vitesse d'un automobiliste soit

**a)** supérieure à 90 km/h ?

**b)** inférieure à 60 km/h ?

**c)** comprise entre 60 et 90 km/h ?

**3)** En prévision d'un contrôle radar, quelle doit être la vitesse maximale tolérée afin de ne pas verbaliser plus de 10 % des conducteurs ?

## Récapitulatif des lois discrètes

| Loi | Notation | Support | Loi | Espérance | Variance |
|---|---|---|---|---|---|
| Bernoulli | $\mathcal{B}(1,p)$ | $X(\Omega)=\{0,1\}$ | $P(X=0)=q \quad P(X=1)=p$ | $\mathrm{E}(X)=p$ | $\mathrm{Var}(X)=pq$ |
| Binomiale | $\mathcal{B}(n,p)$ | $X(\Omega)=\{0,\dots,n\}$ | $P(X=k)=\binom{n}{k}\,p^k q^{n-k}$ | $\mathrm{E}(X)=np$ | $\mathrm{Var}(X)=npq$ |
| Hypergéométrique | $\mathcal{H}(N,n,p)$ | $X(\Omega)\subset\{0,\dots,n\}$ | $P(X=k)=\dfrac{\binom{Np}{k}\times\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ | $\mathrm{E}(X)=np$ | $\mathrm{Var}(X)=npq\dfrac{N-n}{N-1}$ |
| Géométrique | $\mathcal{G}(p)$ | $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ | $P(X=k)=pq^{k-1}$ | $\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{p}$ | $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{q}{p^2}$ |
| Pascal | $\mathrm{Pascal}(r,p)$ | $X(\Omega)=\{r,r+1,\dots\}$ | $P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}$ | $\mathrm{E}(X)=\dfrac{r}{p}$ | $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{rq}{p^2}$ |
| Poisson | $\mathcal{P}(\lambda)$ | $X(\Omega)=\mathbb{N}$ | $P(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ | $\mathrm{E}(X)=\lambda$ | $\mathrm{Var}(X)=\lambda$ |

$p\in[0,1] \qquad q=1-p \qquad n,N,r\in\mathbb{N}^* \qquad \lambda>0$

## Récapitulatif des lois continues

| Loi | Notation | Support | Loi/Densité | Espérance | Variance |
|---|---|---|---|---|---|
| Uniforme | $\mathcal{U}(a,b)$ | $X(\Omega)=[a,b]$ | $f_X(x)=\dfrac{1}{b-a}$ si $x\in[a,b]$ | $\mathrm{E}(X)=\dfrac{a+b}{2}$ | $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ |
| Exponentielle | $\mathcal{E}(\lambda)$<br>$\mathrm{Exp}(\lambda)$ | $X(\Omega)=[0,+\infty[$ | $f_X(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ si $x\geqslant 0$ | $\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ | $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$ |
| Normale | $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ | $X(\Omega)=\mathbb{R}$ | $f_X(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | $\mathrm{E}(X)=\mu$ | $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$ |
| Normale standard ($Z$) | $\mathcal{N}(0,1)$ | $Z(\Omega)=\mathbb{R}$ | $f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-z^2/2}$ | $\mathrm{E}(Z)=0$ | $\mathrm{Var}(Z)=1$ |
| Khi-deux ($K^2$) | $\chi^2(n)$ | $K^2(\Omega)=[0,+\infty[$ | $K^2=\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ où $Z_i\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)$ ind. | $\mathrm{E}(K^2)=n$ | $\mathrm{Var}(K^2)=2n$ |
| Student ($T$) | $St(n)$ | $T(\Omega)=\mathbb{R}$ | $T=\dfrac{Z}{\sqrt{K^2/n}}$ où $\begin{cases} Z\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1) \\ K^2\hookrightarrow\chi^2(n)\end{cases}$ ind. | $\mathrm{E}(T)=0$ | $\mathrm{Var}(T)=\dfrac{n}{n-2}$ |
| Fisher ($F$) | $F(n_1,n_2)$ | $F(\Omega)=[0,+\infty[$ | $F=\dfrac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2}$ où $\begin{cases} K_1^2\hookrightarrow\chi^2(n_1) \\ K_2^2\hookrightarrow\chi^2(n_2)\end{cases}$ ind. | $\mathrm{E}(F)=\dfrac{n_2}{n_2-2}$ | $\mathrm{Var}(F)=\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$ |

$a,b\in\mathbb{R} \qquad a<b \qquad \lambda>0 \qquad \mu\in\mathbb{R} \qquad \sigma>0 \qquad n,n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$

# Fonction de répartition de la loi normale standard

$$P(\mathcal{N}(0,1) \leqslant z)$$

*Exemple* : $P\big(\mathcal{N}(0,1) \leqslant 1.33\big) = 0.9082$

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| **0.1** | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| **0.2** | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| **0.3** | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| **0.4** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.5** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.6** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| **0.7** | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| **0.8** | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| **0.9** | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| **1.0** | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| **1.1** | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| **1.2** | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| **1.3** | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| **1.4** | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| **1.5** | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| **1.6** | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| **1.7** | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| **1.8** | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| **1.9** | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| **2.0** | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| **2.1** | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| **2.2** | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| **2.3** | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| **2.4** | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| **2.5** | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| **2.6** | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| **2.7** | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| **2.8** | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| **2.9** | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| **3.0** | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| **3.1** | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| **3.2** | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| **3.3** | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| **3.4** | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |