

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

1^{re} session

4^e semestre

Licence Economie-Gestion – 2^e année

Matière : Statistiques et probabilités

Durée : 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Problème

En 2016, dans son enquête triennale sur les conditions de vie des étudiants basée sur plus de 46 000 réponses, l'observatoire national de la vie étudiante (OVE) évalue à 362 € le loyer moyen mensuel des étudiants *décohabitants* (ne résidant pas chez leurs parents) dans les communes de 100 000 à 200 000 habitants.

Source : www.ove-national.education.fr

Partie I (25 min, 4,5 points)

Début 2019, une enquête (factice) menée sur 90 étudiants (décohabitants) de l'Université de Limoges donne les résultats présentés dans la sortie SPSS suivante :

Statistiques descriptives

	N	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart type	Variance
	Statistiques	Statistiques	Statistiques	Statistiques	Erreur standard	Statistiques
Loyer	90	166	554	348,03	10,001	94,876
N valide (liste)	90					9001,471

- 1) Donner le modèle statistique (population, variable, échantillon, paramètre) correspondant.
- 2) Donner un estimateur du loyer moyen en précisant ses propriétés.
- 3) Commenter la sortie SPSS ci-dessus.
- 4) Donner un intervalle de confiance à 95 % du loyer moyen.
- 5) Afin de pouvoir étudier la variance des loyers dans la partie suivante, est-il nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire sur la variable statistique ? Si oui, faire cette hypothèse !

Partie II (25 min, 4,5 points)

Tout d'abord, on souhaite vérifier que les écarts de loyers ne sont pas trop importants.

- 1) Donner un estimateur de la variance des loyers. En déduire une estimation de l'écart-type des loyers.
- 2) Donner un intervalle de confiance à 95 % pour l'écart-type des loyers.
- 3) Commenter, en allant au-delà de la simple lecture du tableau, la sortie STATA suivante :

```
Stata. sdtest Loyer == 83, level(90)
```

One-sample test of variance

Variable	Obs	Mean	Std. Err.	Std. Dev.	[90% Conf. Interval]	
Loyer	90	348.0333	10.00082	94.87608	331.4104	364.6562

sd = sd(Loyer)
Ho: sd = 83
Ha: sd < 83
Pr(C < c) = 0.9723

c = chi2 = 116.2913
degrees of freedom = 89
Ha: sd != 83
2*Pr(C > c) = 0.0553

Ha: sd > 83
Pr(C > c) = 0.0277

4) Que doit-on penser des écarts des loyers ?

Partie III (35 min, 6 points)

On souhaite à présent vérifier si le loyer moyen est significativement inférieur à celui donné par l'OVE.

- 1) Préciser, en les justifiant, les hypothèses du test.
- 2) Construire un test avec un risque de 5 % et conclure. Quel risque effectif prenez-vous ?
- 3) Calculer (approximativement) la probabilité critique associée au test.
- 4) Que devient la conclusion du test si on prend un risque de première espèce de 10 % ?
- 5) Commenter la sortie R suivante. Confirme-t-elle vos calculs ?

```
R> t.test(loyer, mu=362, conf.level=0.9)
```

One Sample t-test
data: x
t = -1.3966, df = 89, p-value = 0.166
alternative hypothesis: true mean is not equal to 362
90 percent confidence interval:
331.4104 364.6562
sample estimates:
mean of x
348.0333

Partie IV (35 min, 5 points)

Dans l'enquête nationale de l'OVE, 52.6 % des étudiants décohabitants vivent seuls (les autres décohabitants vivent à plusieurs). L'enquête effectuée sur les 90 étudiants de l'Université de Limoges montre que 37 habitent seuls. En outre, 5 étudiants n'ont pas souhaité répondre à cette question.

- 1) Décrire le modèle statistique (population, variable, loi, paramètre).
- 2) Donner un estimateur de la part d'étudiants (décohabitants) de l'Université de Limoges vivant seuls en précisant ses propriétés. En déduire une estimation.
- 3) Ces données vous amènent-elles à conclure, au risque de 10 %, que la part d'étudiants (décohabitants) de l'Université de Limoges vivant seuls est significativement différente de la part nationale (de l'OVE) ?
- 4) Commenter la sortie SAS suivante :

The FREQ Procedure

Seul	Frequency	Percent	Cumulative Frequency	Cumulative Percent
0	48	56.47	48	56.47
1	37	43.53	85	100.00
Frequency Missing = 5				

Test of H0: Proportion = 0.526	
ASE under H0	0.0542
Z	-1.6748
One-sided Pr < Z	0.0470
Two-sided Pr > Z	0.0940

Effective Sample Size = 85
Frequency Missing = 5

Récapitulatif des lois discrètes

Nom	Notation	Support	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(1, p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$	$P(X = 0) = q \quad P(X = 1) = p$	$E(X) = p$	$\text{Var}(X) = pq$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq$
Hypergéométrique	$\mathcal{H}(N, n, p)$	$X(\Omega) \subset \{0, \dots, n\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	$P(X = k) = pq^{k-1}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$
Pascal	$\text{Pascal}(r, p)$	$X(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$E(X) = \frac{r}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$	$\text{Var}(X) = \lambda$

$$p \in [0, 1] \quad q = 1 - p \quad n, N, r \in \mathbb{N}^* \quad \lambda > 0$$

Récapitulatif des lois continues

Nom	Notation	Support	Loi/Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathcal{U}(a, b)$	$X(\Omega) = [a, b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$ $\text{Exp}(\lambda)$	$X(\Omega) = [0, +\infty[$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$X(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$E(X) = \mu$	$\text{Var}(X) = \sigma^2$
Normale standard (Z)	$\mathcal{N}(0, 1)$	$Z(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$	$E(Z) = 0$	$\text{Var}(Z) = 1$
Khi-deux (K^2)	$\chi^2(n)$	$K^2(\Omega) = [0, +\infty[$	$K^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ où $Z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ ind.	$E(K^2) = n$	$\text{Var}(K^2) = 2n$
Student (T)	$St(n)$	$T(\Omega) = \mathbb{R}$	$T = \frac{Z}{\sqrt{K^2/n}}$ où $\begin{cases} Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ K^2 \hookrightarrow \chi^2(n) \end{cases}$	$E(T) = 0$	$\text{Var}(T) = \frac{n}{n-2}$
Fisher (F)	$F(n_1, n_2)$	$F(\Omega) = [0, +\infty[$	$F = \frac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2}$ où $\begin{cases} K_1^2 \hookrightarrow \chi^2(n_1) \\ K_2^2 \hookrightarrow \chi^2(n_2) \end{cases}$	$E(F) = \frac{n_2}{n_2-2}$	$\text{Var}(F) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \quad \lambda > 0 \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \sigma > 0 \quad n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$$

Fonction de répartition de la loi de normale $\mathcal{N}(0, 1)$

Exemple : $P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 1,33) = 0,9082$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6
3,0	0,998 7	0,998 7	0,998 7	0,998 8	0,998 8	0,998 9	0,998 9	0,998 9	0,999 0	0,999 0
3,1	0,999 0	0,999 1	0,999 1	0,999 1	0,999 2	0,999 2	0,999 2	0,999 2	0,999 3	0,999 3
3,2	0,999 3	0,999 3	0,999 4	0,999 4	0,999 4	0,999 4	0,999 4	0,999 5	0,999 5	0,999 5
3,3	0,999 5	0,999 5	0,999 5	0,999 6	0,999 6	0,999 6	0,999 6	0,999 6	0,999 6	0,999 7
3,4	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 8

Fonction de répartition de la loi de Student $St(n)$

Exemple : $P(St(11) \leq 2,201) = 0,975$.

$n \backslash \alpha$	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21	12,92
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	0,127	0,255	0,389	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
32	0,127	0,255	0,389	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	0,127	0,255	0,389	0,529	0,682	0,852	1,052	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,852	1,052	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,051	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
42	0,126	0,255	0,388	0,528	0,680	0,850	1,049	1,302	1,682	2,018	2,418	2,698	3,296	3,538
44	0,126	0,255	0,388	0,528	0,680	0,850	1,049	1,301	1,680	2,015	2,414	2,692	3,286	3,526
46	0,126	0,255	0,388	0,528	0,680	0,850	1,048	1,300	1,679	2,013	2,410	2,687	3,277	3,515
48	0,126	0,255	0,388	0,528	0,680	0,849	1,048	1,299	1,677	2,011	2,407	2,682	3,269	3,505
50	0,126	0,255	0,388	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
55	0,126	0,255	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668	3,245	3,476
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
65	0,126	0,254	0,387	0,527	0,678	0,847	1,045	1,295	1,669	1,997	2,385	2,654	3,220	3,447
70	0,126	0,254	0,387	0,527	0,678	0,847	1,044	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	0,126	0,254	0,387	0,526	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
90	0,126	0,254	0,387	0,526	0,677	0,846	1,042	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
110	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,659	1,982	2,361	2,621	3,166	3,381
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
130	0,126	0,254	0,386	0,526	0,676	0,844	1,041	1,288	1,657	1,978	2,355	2,614	3,154	3,367
140	0,126	0,254	0,386	0,526	0,676	0,844	1,040	1,288	1,656	1,977	2,353	2,611	3,149	3,361
150	0,126	0,254	0,386	0,526	0,676	0,844	1,040	1,287	1,655	1,976	2,351	2,609	3,145	3,357
200	0,126	0,254	0,386	0,525	0,676	0,843	1,039	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340
300	0,126	0,254	0,386	0,525	0,675	0,843	1,038	1,284	1,650	1,968	2,339	2,592	3,118	3,323
500	0,126	0,253	0,386	0,525	0,675	0,842	1,038	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Fonction de répartition de la loi du $\chi^2(n)$

Exemple : $P(\chi^2(15) \leq 22,31) = 0,90$.

$n \backslash \alpha$	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,4	0,5	0,6	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	0,102	0,275	0,455	0,708	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,022	1,386	1,833	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	1,869	2,366	2,946	4,108	6,251	7,815	9,348	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	2,753	3,357	4,045	5,385	7,779	9,488	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	3,655	4,351	5,132	6,626	9,236	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	4,570	5,348	6,211	7,841	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	5,493	6,346	7,283	9,037	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	5,071	6,423	7,344	8,351	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	7,357	8,343	9,414	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	8,295	9,342	10,47	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	9,237	10,34	11,53	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	10,18	11,34	12,58	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	9,299	11,13	12,34	13,64	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,17	12,08	13,34	14,69	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,04	13,03	14,34	15,73	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,91	13,98	15,34	16,78	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,09	12,79	14,94	16,34	17,82	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,86	13,68	15,89	17,34	18,87	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,844	7,633	8,907	10,12	11,65	14,56	16,85	18,34	19,91	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,434	8,260	9,591	10,85	12,44	15,45	17,81	19,34	20,95	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,034	8,897	10,28	11,59	13,24	16,34	18,77	20,34	21,99	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,643	9,542	10,98	12,34	14,04	17,24	19,73	21,34	23,03	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,260	10,20	11,69	13,09	14,85	18,14	20,69	22,34	24,07	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,886	10,86	12,40	13,85	15,66	19,04	21,65	23,34	25,11	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	19,94	22,62	24,34	26,14	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	20,84	23,58	25,34	27,18	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	21,75	24,54	26,34	28,21	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	22,66	25,51	27,34	29,25	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	23,57	26,48	28,34	30,28	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	24,48	27,44	29,34	31,32	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
32	15,13	16,36	18,29	20,07	22,27	26,30	29,38	31,34	33,38	36,97	42,58	46,19	49,48	53,49	56,33
32	15,13	16,36	18,29	20,07	22,27	26,30	29,38	31,34	33,38	36,97	42,58	46,19	49,48	53,49	56,33
34	16,50	17,79	19,81	21,66	23,95	28,14	31,31	33,34	35,44	39,14	44,90	48,60	51,97	56,06	58,96
36	17,89	19,23	21,34	23,27	25,64	29,97	33,25	35,34	37,50	41,30	47,21	51,00	54,44	58,62	61,58
38	19,29	20,69	22,88	24,88	27,34	31,81	35,19	37,34	39,56	43,46	49,51	53,38	56,90	61,16	64,18
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	33,66	37,13	39,34	41,62	45,62	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
42	22,14	23,65	26,00	28,14	30,77	35,51	39,08	41,34	43,68	47,77	54,09	58,12	61,78	66,21	69,34
44	23,58	25,15	27,57	29,79	32,49	37,36	41,02	43,34	45,73	49,91	56,37	60,48	64,20	68,71	71,89
46	25,04	26,66	29,16	31,44	34,22	39,22	42,97	45,34	47,79	52,06	58,64	62,83	66,62	71,20	74,44
48	26,51	28,18	30,75	33,10	35,95	41,08	44,92	47,34	49,84	54,20	60,91	65,17	69,02	73,68	76,97
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	42,94	46,86	49,33	51,89	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
55	31,73	33,57	36,40	38,96	42,06	47,61	51,74	54,33	57,02	61,66	68,80	73,31	77,38	82,29	85,75
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	52,29	56,62	59,33	62,13	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
65	39,38	41,44	44,60	47,45	50,88	56,99	61,51	64,33	67,25	72,28	79,97	84,82	89,18	94,42	98,11
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	61,70	66,40	69,33	72,36	77,58	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2
75	47,21	49,48	52,94	56,05	59,79	66,42	71,29	74,33	77,46	82,86	91,06	96,22	100,8	106,4	110,3
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	71,14	76,19	79,33	82,57	88,13	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3
85	55,17	57,63	61,39	64,75	68,78	75,88	81,09	84,33	87,67	93,39	102,1	107,5	112,4	118,2	122,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	80,62	85,99	89,33	92,76	98,65	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
95	63,25	65,90	69,92	73,52	77,82	85,38	90,90	94,33	97,85	103,9	113,0	118,8	123,9	130,0	134,2
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	90,13	95,81	99,33	102,9	109,1	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2
110	75,55	78,46	82,87	86,79	91,47	99,67	105,6	109,3	113,1	119,6	129,4	135,5	140,9	147,4	151,9
120	83,85	86,92	91,57	95,70	100,6	109,2	115,5	119,3	123,3	130,1	140,2	146,6	152,2	159,0	163,6
130	92,22	95,45	100,3	104,7	109,8	118,8	125,3	129,3	133,4	140,5	151,0	157,6	163,5	170,4	175,3
140	100,7	104,0	109,1	113,7	119,0	128,4	135,1	139,3	143,6	150,9	161,8	168,6	174,6	181,8	186,8
150	109,1	112,7	118,0	122,7	128,3	138,0	145,0	149,3	153,8	161,3	172,6	179,6	185,8	193,2	198,4
200	152,2	156,4	162,7	168,3	174,8	186,2	194,3	199,3	204,4	213,1	226,0	234,0	241,1	249,4	255,3
250	196,2	200,9	208,1	214,4	221,8	234,6	243,7	249,3	255,0	264,7	279,1	287,9	295,7	304,9	311,3
300	240,7	246,0	253,9	260,9	269,1	283,1	293,2	299,3	305,6	316,1	331,8	341,4	349,9	359,9	366,8
400	330,9	337,2	346,5	354,6	364,2	380,6	392,2	399,3	406,5	418,7	436,6	447,6	457,3	468,7	476,6
500	422,3	429,4	439,9	449,1	459,9	478,3	491,4	499,3	507,4	521,0	540,9	553,1	563,9	576,5	585,2