Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

1re session | 3e semestre

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Statistiques et probabilités – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Questions de cours (15 min, 3 points)
Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.

1) L'inégalité de Bienaymé-Chebichev est

$$P(|X-\mu|>\alpha) \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

2) On a

$$P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) = P(|X-\mu| \leqslant 3\sigma) = 1 - P(|X-\mu|>3\sigma) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{8}{9} \approx 0.88$$

3) Si on suppose que X suit une loi normale, on a

$$P(X \leqslant \mu+3\sigma) = P(X^* \leqslant 3) = 0.9987 \quad \text{et} \quad P(X \leqslant \mu-3\sigma) = P(X^* \leqslant -3) = 1-0.9987 = 0.0013$$

D'où

$$P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) = P(X \leqslant \mu+3\sigma) - P(X \leqslant \mu-3\sigma) = 0.9987 - 0.0013 = 0.9974$$

Exercice I (15 min, 3 points)
L'univers des possibles Ω est composé de tous les codes possibles. Le cardinal de Ω correspond donc au nombre de codes possibles. Le code étant tapé au hasard, tous les codes sont équiprobables. La probabilité p que le code soit le bon (ouvre la porte) est donc $1/\operatorname{Card}\Omega$.

1) Si l'ordre d'entrée des chiffres intervient, il faut donc choisir 3 chiffres ordonnés (et distincts) parmi 9 puis 1 lettre parmi 2. On a donc

$$\operatorname{Card}\Omega = A_3^{10} \times A_1^2 = \frac{10!}{7!} \times 2 = 10 \times 9 \times 8 \times 2 = 1440 \implies p = \frac{1}{1440} \approx 0.069\ \%$$

2) Si l'ordre n'intervient pas, on a alors

$$\operatorname{Card}\Omega = \binom{10}{3} \times \binom{2}{1} = \frac{10!}{7!\,3!} \times 2 = 240 \implies p = \frac{1}{240} \approx 0.417\ \%$$

Exercice II (30 min, 5 points)
Dans un département français, le taux de chômage est de 15 %.

1) Soit X le nombre de personnes au chômage parmi 10 personnes choisies au hasard.

a) Le tirage de 10 personnes au hasard correspond à 10 tirages sans remise dans une population contenant 15 % de personnes au chômage. La variable X suit donc une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, 10, 0.15)$. La taille N de la population étant inconnue, et évidemment très supérieure au nombre de personnes tirées (10), on peut considérer que ces tirages sont avec remise et approcher la loi hypergéométrique par une loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.15)$. On a $\mathrm{E}(X) = 10 \times 0.15 = 1.5$ et $\mathrm{Var}(X) = 10 \times 0.15 \times 0.85 = 1.275$.

b) La probabilité qu'aucune personne ne soit au chômage parmi les 10 choisies est

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.15^0 \times 0.85^{10} \approx 19.69 \ \%$$

c) La probabilité qu'au moins 2 personnes soient au chômage est

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \quad P(X = 1) = \binom{10}{1} 0.15^1 \times 0.85^9 \approx 34.74 \ \%$$

D'où $P(X \geqslant 2) \approx 1 - 0.1969 - 0.3474 = 45.57$ %.

2) Dans ce même département, les femmes représentent 30 % des personnes au chômage, et 45 % de l'ensemble de la population.

a) On choisit une personne au hasard dans le département, l'univers des possibles Ω correspond à la population du département. Le choix étant fait au hasard, il y a équiprobabilité.
Si on note C l'événement « l'individu choisi est au chômage » et F l'événement « l'individu choisi est une femme », on a

$$P(C) = 0.15 \quad P(F) = 0.45 \quad P(F|C) = 0.30$$

b) La probabilité qu'une femme soit au chômage est

$$P(C|F) = \frac{P(F|C) \times P(C)}{P(F)} = \frac{0.30 \times 0.15}{0.45} = 0.10 = 10 \ \%$$

Exercice III (30 min, 4 points)
Une entreprise mesure la pollution dans ses rejets d'eaux usées. Cette pollution peut prendre la forme de deux composants A et B. En temps normal, la pollution (en mg/l) du composant A suit une loi exponentielle de paramètre 10 et celle du composant B une loi exponentielle de paramètre 15. En outre, ces deux pollutions sont corrélées avec un coefficient de corrélation linéaire de 0.25.

1) On a

$$A \hookrightarrow \mathcal{E}(10) \implies \mathrm{E}(A) = \frac{1}{10} = 0.10 \qquad \mathrm{Var}(A) = \frac{1}{10^2} = 0.01$$
$$B \hookrightarrow \mathcal{E}(15) \implies \mathrm{E}(B) = \frac{1}{15} = 0.067 \qquad \mathrm{Var}(B) = \frac{1}{15^2} = 0.0044$$

2) La probabilité que la pollution du composant A soit inférieure à 0.15 est

$$P(A \leqslant 0.15) = \int_0^{0.15} 10\mathrm{e}^{-10x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-10x}\right]_0^{0.15} = 1 - \mathrm{e}^{-1.5} \approx 0.7768$$

3) Pour calculer la probabilité que la pollution du composant B soit supérieure à 0.20, on calcule d'abord la probabilité que cette pollution soit inférieure à 0.20 :

$$P(B \leqslant 0.20) = \int_0^{0.20} 10\mathrm{e}^{-15x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-15x}\right]_0^{0.20} = 1 - \mathrm{e}^{-3} \approx 1 - 0.0498 = 0.9502$$

D'où $(PB \geqslant 0.20) \approx 0.0498$.

4) Soit T la pollution totale $(A+B)$. L'espérance de T est

$$\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(A+B) = \mathrm{E}(A) + \mathrm{E}(B) = 0.10 + 0.067 = 0.167$$

Avant de calculer la variance de T, il est nécessaire de connaitre la covariance entre A et B :

$$\mathrm{Cov}(A,B) = \rho(A,B) \times \sigma_A \times \sigma_B = 0.25 \times \sqrt{0.01} \times \sqrt{0.0044} \approx 0.00166$$

La variance de T est alors

$$\mathrm{Var}(T) = \mathrm{Var}(A+B) = \mathrm{Var}(A) + \mathrm{Var}(B) + 2\,\mathrm{Cov}(A,B) = 0.01 + 0.0044 + 2 \times 0.00166 \approx 0.0177$$

Exercice IV (30 min, 5 points)

Les spécifications d'un ordinateur portable précisent une autonomie (de fonctionnement sur batterie) de 6h30. Après demande de précisions, il s'avère que l'autonomie en minutes X est distribuée suivant une loi normale d'écart-type 30 minutes..

1) En utilisant les minutes comme unité de mesure, on a

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(390, 30) \qquad \mathrm{E}(X) = 390 \qquad \mathrm{Var}(X) = 30^2 = 900$$

2) La probabilité que l'ordinateur fonctionne moins de 6 heures (soit 360 min) est

$$P(X \leqslant 360) = P\left(\frac{X-390}{30} \leqslant \frac{360-390}{30}\right) = P(Z \leqslant -1) = 1 - P(Z \leqslant 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

3) La probabilité qu'il fonctionne plus de 8 heures (soit 480 min) est

$$P(X \geqslant 480) = 1 - P(X \leqslant 480) = 1 - P(Z \leqslant 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

4) La probabilité qu'il fonctionne entre 6 et 8 heures est alors

$$P(360 \leqslant X \leqslant 480) = P(X \leqslant 480) - P(X \leqslant 360) = 0.9987 - 0.1587 = 0.84$$

5) Après 6 mois d'utilisation, on observe que 2 fois sur 3, l'autonomie est inférieure à 6 heures. Si on suppose l'écart-type inchangé (égal à 30 minutes), quelle est l'autonomie moyenne de fonctionnement après 6 mois ?

On note Y l'autonomie après 6 mois. On suppose donc que $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, 30)$. On sait en outre que

$$2/3 = 0.666 = P(Y \leqslant 360) = P\left(\frac{Y-\mu}{30} \leqslant \frac{360-\mu}{30}\right) = P\left(Z \leqslant \frac{360-\mu}{30}\right)$$

On a donc

$$\frac{360-\mu}{30} = z_{0.666} \approx 0.43 \implies \mu = 360 - 0.43 \times 30 \approx 347 \text{ min} = 5 \text{ h } 47 \text{ min}$$