

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

1^{re} session

3^e semestre

Licence Economie-Gestion – 2^e année

Matière : Statistiques et probabilités

Durée : 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Questions de cours (15 min, 3 points)

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ .

- 1) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Chebichev.
- 2) À l'aide de cette égalité déterminer la probabilité $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$.
- 3) Si on suppose que X suit une loi normale, est-il possible d'améliorer le calcul de la probabilité précédente ?

Exercice I (15 min, 3 points)

La porte d'accès d'un immeuble est protégée par un code électronique. Le clavier comporte les 10 chiffres $0, \dots, 9$ et les lettres A, B . On suppose que le code est composé de 3 chiffres distincts suivis d'une lettre. Quelle est la probabilité, qu'un individu tapant un code au hasard (de 3 chiffres distincts suivis d'une lettre) ouvre la porte :

- 1) si l'ordre d'entrée des chiffres intervient ?
- 2) si l'ordre n'intervient pas ?

Exercice II (30 min, 5 points)

Dans un département français, le taux de chômage est de 15 %.

- 1) Soit X le nombre de personnes au chômage parmi 10 personnes choisies au hasard.
 - a) Déterminer, en justifiant, la loi de X et rappeler $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.
 - b) Calculer la probabilité qu'aucune personne ne soit au chômage parmi les 10 choisies.
 - c) Calculer la probabilité qu'au moins 2 personnes soient au chômage.
- 2) Dans ce même département, les femmes représentent 30 % des personnes au chômage, et 45 % de l'ensemble de la population.
 - a) Traduire l'énoncé avec des probabilités et des événements.
 - b) Calculer la probabilité qu'une femme soit au chômage.

Exercice III (30 min, 4 points)

Une entreprise mesure la pollution dans ses rejets d'eaux usées. Cette pollution peut prendre la forme de deux composants A et B . En temps normal, la pollution (en mg/l) du composant A suit une loi exponentielle de paramètre 10 et celle du composant B une loi exponentielle de paramètre 15. En outre, ces deux pollutions sont corrélées avec un coefficient de corrélation linéaire de 0.25.

- 1) Donner la pollution moyenne pour chaque composant ainsi que leur variance.
- 2) Quelle est la probabilité que la pollution du composant A soit inférieure à 0.15 ?

3) Quelle est la probabilité que la pollution du composant B soit supérieure à 0.20 ?

4) Soit T la pollution totale ($A + B$). Déterminer l'espérance et la variance de T .

Exercice IV (30 min, 5 points)

Les spécifications d'un ordinateur portable précisent une autonomie (de fonctionnement sur batterie) de 6h30. Après demande de précisions, il s'avère que l'autonomie en minutes X est distribuée suivant une loi normale d'écart-type 30 minutes.

1) Donner l'espérance et la variance de X .

2) Quelle est la probabilité que l'ordinateur fonctionne moins de 6 heures ?

3) Quelle est la probabilité qu'il fonctionne plus de 8 heures ?

4) Quelle est la probabilité qu'il fonctionne entre 6 et 8 heures ?

5) Après 6 mois d'utilisation, on observe que 2 fois sur 3, l'autonomie est inférieure à 6 heures. Si on suppose l'écart-type inchangé (égal à 30 minutes), quelle est l'autonomie moyenne de fonctionnement après 6 mois ?

Récapitulatif des lois discrètes

Nom	Notation	Support	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(1, p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$	$P(X = 0) = q \quad P(X = 1) = p$	$E(X) = p$	$\text{Var}(X) = pq$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq$
Hypergéométrique	$\mathcal{H}(N, n, p)$	$X(\Omega) \subset \{0, \dots, n\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$E(X) = np$	$\text{Var}(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	$P(X = k) = pq^{k-1}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$
Pascal	$\text{Pascal}(r, p)$	$X(\Omega) = \{r, r+1, \dots\}$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$E(X) = \frac{r}{p}$	$\text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$	$\text{Var}(X) = \lambda$

$$p \in [0, 1] \quad q = 1 - p \quad n, N, r \in \mathbb{N}^* \quad \lambda > 0$$

Récapitulatif des lois continues

Nom	Notation	Support	Loi/Densité	Espérance	Variance
Uniforme	$\mathcal{U}(a, b)$	$X(\Omega) = [a, b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$ $\text{Exp}(\lambda)$	$X(\Omega) = [0, +\infty[$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$X(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$E(X) = \mu$	$\text{Var}(X) = \sigma^2$
Normale standard (Z)	$\mathcal{N}(0, 1)$	$Z(\Omega) = \mathbb{R}$	$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$	$E(Z) = 0$	$\text{Var}(Z) = 1$
Khi-deux (K^2)	$\chi^2(n)$	$K^2(\Omega) = [0, +\infty[$	$K^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ où $Z_i \leftrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ ind.	$E(K^2) = n$	$\text{Var}(K^2) = 2n$
Student (T)	$St(n)$	$T(\Omega) = \mathbb{R}$	$T = \frac{Z}{\sqrt{K^2/n}}$ où $\begin{cases} Z \leftrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ K^2 \leftrightarrow \chi^2(n) \end{cases}$	$E(T) = 0$	$\text{Var}(T) = \frac{n}{n-2}$
Fisher (F)	$F(n_1, n_2)$	$F(\Omega) = [0, +\infty[$	$F = \frac{K_1^2/n_1}{K_2^2/n_2}$ où $\begin{cases} K_1^2 \leftrightarrow \chi^2(n_1) \\ K_2^2 \leftrightarrow \chi^2(n_2) \end{cases}$	$E(F) = \frac{n_2}{n_2-2}$	$\text{Var}(F) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$

$$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \quad \lambda > 0 \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \sigma > 0 \quad n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$$

Fonction de répartition de la loi de normale $\mathcal{N}(0, 1)$

Exemple : $P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 1,33) = 0,908 2.$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6
3,0	0,998 7	0,998 7	0,998 7	0,998 8	0,998 8	0,998 9	0,998 9	0,998 9	0,999 0	0,999 0
3,1	0,999 0	0,999 1	0,999 1	0,999 1	0,999 2	0,999 2	0,999 2	0,999 2	0,999 3	0,999 3
3,2	0,999 3	0,999 3	0,999 4	0,999 4	0,999 4	0,999 4	0,999 4	0,999 5	0,999 5	0,999 5
3,3	0,999 5	0,999 5	0,999 5	0,999 6	0,999 6	0,999 6	0,999 6	0,999 6	0,999 6	0,999 7
3,4	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 7	0,999 8