Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2025-2026

Session 1 **Semestre 4**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (40 min, 6 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) La matrice A étant symétrique ($A' = A$), elle est automatiquement diagonalisable.

2)

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

3) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique.
On a donc $\lambda = 1$ $(\times 2)$ et $\lambda = -1 (\times 1)$.

4) On détermine les sous-espaces propres :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff (A - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff y = x \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une base de E_1 est donc $\{(1, 1, 0)', (0, 0, 1)'\}$ et $\dim E_1 = 2$. De même,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff (A + I_3)X = 0 \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une base de E_{-1} est donc $\{(1, -1, 0)'\}$ et $\dim E_{-1} = 1$.
On retrouve donc que A est diagonalisable puisque elle possède 3 valeurs propres (en les comptant suivant leur ordre de multiplicité) et $\dim E_1 = 2 = o(1)$ et $\dim E_{-1} = 1 = o(-1)$.

5) La matrice diagonale D associée à A est la matrice des valeurs propres.

6) La matrice de passage est la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs propres.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = PDP^{-1}$$

7) On sait que $A^k = PD^kP^{-1}$ avec

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \implies D^k = \begin{cases} D & \text{si } n \text{ est impair} \\ I_3 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \implies A^k = \begin{cases} PDP^{-1} = A & \text{si } n \text{ est impair} \\ PI_3P^{-1} = I_3 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

8) On pouvait arriver à la même conclusion en remarquant simplement que $A^2 = I_3$.

Exercice II (30 min, 5 points)
On considère l'équation récurrente

$$(E) \quad u_{n+2} - u_{n+1} + au_n = 2^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

1) L'équation homogène (E_0) est $v_{n+2} - v_{n+1} + av_n = 0$. Son équation caractéristique est donc $r^2 - r + a = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 1 - 4a$.
Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si $a < 1/4$, l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes :

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2} \quad \text{d'où} \quad v_n = K_1 r_1^n + K_2 r_2^n$$

Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si $a = 1/4$, l'équation caractéristique admet une solution double :

$$r = \frac{1}{2} = 2^{-1} \quad \text{d'où} \quad v_n = K_1 2^{-n} + K_2 n 2^{-n}$$

Si $\Delta < 0$, c'est-à-dire si $a > 1/4$, l'équation caractéristique n'admet pas de solution réelle. (Les solutions de E_0 existent mais son hors-programme !)
2) D'après ce qui précède, lorsque $a = -2$, on a $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$ d'où $v_n = K_1(-1)^n + K_2 2^n$.
On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $\bar{u}_n = Kn2^n$. En remplaçant dans (E) on trouve $K = 1/6$, d'où $\bar{u}_n = \frac{n}{6}2^n$.
La solution générale de (E) est donc

$$u_n = v_n + \bar{u}_n = K_1(-1)^n + K_2 2^n + \frac{n}{6}2^n$$

Les conditions initiales donnent

$$u_0 = 0 \implies K_1 + K_2 = 0 \implies K_2 = -K_1 \quad u_1 = 10/3 \implies -K_1 - 2K_1 + \frac{2}{6} = \frac{10}{3} \implies K_1 = -1$$

D'où

$$\hat{u}_n = -(-1)^n + 2^n + \frac{n}{6}2^n$$

Exercice III (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$tx'(t) + x(t) = 2te^{t^2} \quad (E)$$

On réécrit l'équation (E) sous forme résolue :

$$(E) \qquad x'(t) + \frac{1}{t}x(t) = 2e^{t^2}$$

L'équation (E) n'est donc définie que lorsque $t \neq 0$. De manière à travailler sur un intervalle, on suppose que $t > 0$.
1) La solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0) est

$$(E_0) \iff x'(t) + \frac{1}{t}x(t) = 0 \iff \frac{x'(t)}{x(t)} = -\frac{1}{t} \iff \ln|x(t)| = -\ln(t) + \text{Cste} \iff \boxed{x_h(t) = \frac{K}{t}}$$

où K est une constante réelle.
2) On cherche une solution particulière $x_p(t)$ de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante :

$$x_p(t) = \frac{K(t)}{t} \implies x_p'(t) = \frac{K'(t)}{t} - \frac{K(t)}{t^2}$$

En remplaçant dans (E), on trouve

$$(E) \implies \frac{K'(t)}{t} - \frac{K(t)}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{K(t)}{t} = 2e^{t^2} \implies K'(t) = 2t\mathrm{e}^{t^2} \implies K(t) = \mathrm{e}^{t^2}$$

Une solution particulière de (E) est donc

$$x_p(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t}$$

3) La solution générale $x(t)$ de (E) est alors

$$\boxed{x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = \frac{K}{t} + \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t} = \frac{K + \mathrm{e}^{t^2}}{t}}$$

Elle est définie pour $t > 0$ (cf début de l'exercice).

4) On a

$$\tilde{x}(1) = \mathrm{e} - 1 \iff K + \mathrm{e} = \mathrm{e} - 1 \iff K = -1$$

D'où l'unique solution $\boxed{\tilde{x}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{t^2} - 1}{t}}$.

5) Le développement limité au voisinage de 0 de e^t est $\mathrm{e}^t = 1 + t + t\varepsilon(t)$. D'où $\mathrm{e}^{t^2} = 1 + t^2 + t^2\varepsilon(t)$.
La limite de $\tilde{x}(t)$ lorsque t tend vers 0 est donc

$$\lim_{t\to 0^+} \tilde{x}(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{t^2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1 + t^2 + t^2\varepsilon(t) - 1}{t} = \lim_{t\to 0^+} t + t\varepsilon(t) = 0$$