Faculté de Droit & des Sciences Économiques
Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2025-2026

Session 1 **Semestre 4**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (20 min, 4 points)
Soit E et F deux espaces vectoriels et $\phi : E \to F$ une application linéaire.

1) Rappeler la définition d'une application linéaire.

2) Donner la définition du noyau $\ker\phi$ de ϕ.

3) Vérifier que $\ker\phi$ est un sous-espace vectoriel.

4) Que pouvez-vous dire de la dimension de $\ker\phi$?

Exercice I (40 min, 6 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

2) Calculer le polynôme caractéristique de A.

3) En déduire les valeurs propres de A.

4) Donnez la matrice diagonale D associée à A.

5) Déterminer la matrice de passage P. Quelle relation existe-t-il entre A, P et D ?

6) Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

7) Etait-il possible de prévoir ce dernier résultat (A^k) sans faire tous les calculs ?

Exercice II (30 min, 5 points)
Pour $a \in \mathbb{R}^*$, on considère l'équation récurrente

$$(E) \quad u_{n+2} - u_{n+1} + a u_n = 2^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

1) Discuter suivant la valeur de a, la forme de la solution générale de l'équation homogène (E_0).

2) On suppose à présent $a = -2$.

a) Donner la solution générale de l'équation homogène (E_0).

b) Trouver une solution particulière de (E).

c) Donner la solution générale de (E).

d) Montrer qu'il existe une unique solution $(\widehat{u}_n)$ de (E) vérifiant $\widehat{u}_0 = 0$ et $\widehat{u}_1 = 10/3$.

Exercice III (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$t x'(t) + x(t) = 2t\mathrm{e}^{t^2} \quad (E)$$

1) Déterminer la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0).

2) En utilisant la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière $x_p(t)$ de (E).

3) Donner la solution générale $x(t)$ de (E). Sur quel intervalle est-elle définie ?

4) Montrer qu'il existe une unique solution $\widetilde{x}(t)$ vérifiant $\widetilde{x}(1) = \mathrm{e} - 1$.

5) Calculer la limite de $\widetilde{x}(t)$ lorsque t tend vers 0^+.