Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2025-2026

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 5 points)
On considère le problème de maximisation suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{minimiser } f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4y \\ \text{sous les contraintes } 4y \geqslant x - 1 \text{ et } y \geqslant 0. \end{cases}$$

1) La fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ de la variable x. La fonction $y \mapsto 4y^2 + 4y$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ de la variable y.
Donc $f(x,y)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.
2) Les contraintes se réécrivent $x - 4y - 1 \leqslant 0$ et $-y \leqslant 0$. Le lagrangien associé à (P) est

$$L(x,y,\mu_1,\mu_2) = x^2 + 4y^2 + 4y + \mu_1(x - 4y - 1) + \mu_2(-y)$$

Les CNO de KT sont alors

$$L'_x(x,y,\mu_1,\mu_2) = 2x + \mu_1 = 0 \quad L'_y(x,y,\mu_1,\mu_2) = 8y + 4 - 4\mu_1 - \mu_2 = 0 \tag{1}$$
$$\mu_1(x - 4y - 1) = 0 \qquad \mu_2(-y) = 0 \tag{3}$$
$$\mu_1 \geqslant 0 \qquad \mu_2 \geqslant 0 \tag{4}$$
$$x - 4y - 1 \leqslant 0 \qquad -y \leqslant 0 \tag{5}$$

3) Pour résoudre le problème (P), on étudie successivement les 4 cas suivants :

- $\mu_1 = \mu_2 = 0$: les équations (1) donne $x = 0$ et $y = -1/2$ qui ne vérifie pas la seconde contrainte ($y \geqslant 0$). Ce cas est donc impossible.
- $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 = 0$: Les équations (3) donnent $x = 4y+1$. En replaçant dans les équations (1), on trouve :

  $$\begin{cases} 8y + 2 + \mu_1 = 0 \\ 8y + 4 - 4\mu_1 = 0 \end{cases} \implies y = \frac{1}{8}(-2 - \mu_1) < 0$$

  Ce cas est aussi impossible.
- $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 > 0$: les équations (3) donnent $y = 0$. En remplaçant dans les équations (1), on trouve

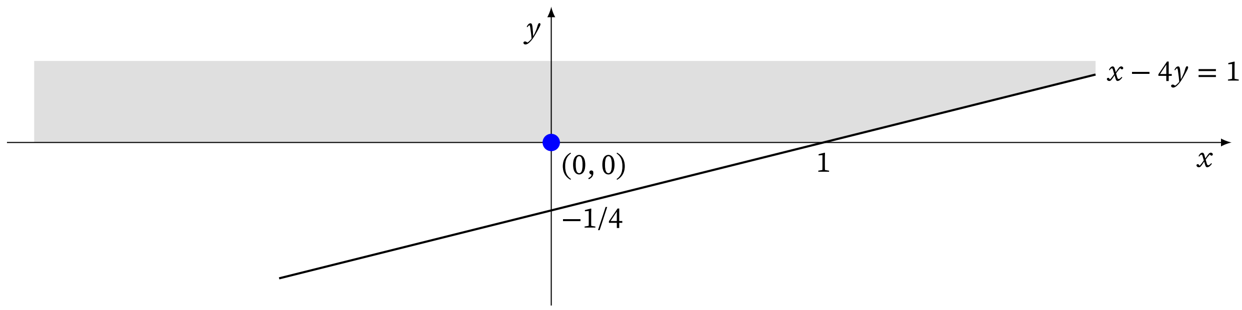
  $$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4 - \mu_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ \mu_2 = 4 \end{cases}$$

  On trouve donc un point candidat $(x_0, y_0) = (0,0)$ avec $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 4$.
- $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$. Les équation (3) donnent $(x,y) = (1,0)$. En remplaçant dans les équations (1), on trouve $\mu_1 = -2 \not\geqslant 0$. Donc ce cas est impossible

En conclusion, le problème (P) admet un unique point critique $(x_0, y_0) = (0, 0)$ avec $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 4$.

Les contraintes sont qualifiées car affines. Comme la fonction f est convexe et les contraintes sont convexes (car affines), on en déduit que (P) admet un minimum global en $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

4) La zone grisée correspond aux points admissibles (vérifiant les contraintes).



Exercice II (30 min, 5 points)
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) On a

$$u_1 = \frac{u_0^2 + 3}{4} = \frac{2^2 + 3}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$$

2) On a $u_0 = 2 > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{4} = \frac{+}{+} > 0$$

La suite est donc à termes strictement positifs.

3) La suite (u_n) est définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = (x^2 + 3)/4$. La fonction f étant trivialement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ est monotone. Comme $u_1 = 7/4 < 2 = u_0$, la suite $(u_n)_n$ est donc décroissante.

4) La suite $(u_n)_n$ étant décroissante et minorée (par 0 car positive), elle converge.

5) La fonction f étant continue (et la suite convergente), sa limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$. D'où

$$\ell = \frac{\ell^2 + 3}{4} \iff \ell^2 - 4\ell + 3 = 0 \iff \ell = 1 \text{ ou } \ell = 3$$

Comme la suite est décroissante et $u_0 = 2$, sa limite ne peut être que $\ell = 1$.

6) Si on suppose $u_0 = 4$ alors $u_1 = 19/4 > 4 = u_0$. La suite $(u_n)_n$ étant monotone (question 3), elle est donc croissante. Si elle était convergente, alors sa limite serait soit $\ell = 1$ soit $\ell = 3$ ce qui est impossible car $u_0 = 4$. Donc, la suite $(u_n)_n$ diverge.

Exercice III (20 min, 4 points)
On se propose d'étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n \ln(n)} \quad \forall n \geqslant 2$$

1) La condition nécessaire de convergence (de la série) est vérifiée car

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n \ln(n)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

2) La dérivée de la fonction $F(x) = \ln(\ln(x))$ est

$$F'(x) = \frac{(\ln(x))'}{\ln(x)} = \frac{1/x}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$$

3) On a

$$\int_2^b \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(\ln(x))\Big]_2^b = \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2)) \implies \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty}\ln(\ln(b)) = +\infty$$

L'intégrale I est donc divergente.

4) La fonction $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ est positive (pour $x \geqslant 2$) et décroissante (pour $x \geqslant 2$) car

$$f'(x) = -\frac{\ln(x)+1}{\big(x\ln(x)\big)^2} \leqslant 0 \qquad \forall x > 1$$

La série $(\sum u_n) = (\sum f(x))$ est donc de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = I$.

La série $(\sum u_n)$ est donc divergente.

Exercice IV (20 min, 3 points)

Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On a

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = I_1 + I_2$$

Pour I_1 :

$$\frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{0}{\sim} t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}} \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^{-\alpha}}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff -\alpha < 1 \iff \alpha > -1$$

Pour I_2 :

$$\frac{t^\alpha}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{1}{t^{2-\alpha}} \qquad \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff 2-\alpha > 1 \iff \alpha < 1$$

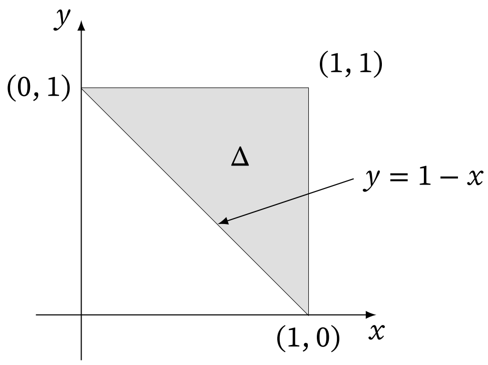
Donc, l'intégrale I converge si, et seulement si, $\alpha \in \,]-1, +1[$.

Exercice V (20 min, 3 points)

Soit T le triange de sommets $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_T 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1)



On voit que

$$(x,y) \in \Delta \iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1-x \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

2)

$$I = \int_0^1\left(\int_{1-x}^1 2y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \big[y^2\big]_{y=1-x}^{y=1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1\big(1-(1-x)^2\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(2x - x^2\big)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$