Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2025-2026

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Exercice I (30 min, 5 points)
On considère le problème de maximisation suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{minimiser } f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4y \\ \text{sous les contraintes } 4y \geqslant x - 1 \text{ et } y \geqslant 0. \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction $f(x,y)$ est convexe.

2) Enoncer les conditions de Kuhn-Tucker associées à (P).

3) Résoudre le problème (P).

4) Représenter graphiquement l'ensemble des points admissibles (vérifiant les contraintes) en indiquant la solution de (P).

Exercice II (30 min, 5 points)
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Calculer u_1.

2) Montrer que la suite est à termes strictement positifs.

3) Etudier les variations de la suite.

4) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

5) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

6) Que pouvez-vous dire lorsque $u_0 = 4$?

Exercice III (20 min, 4 points)
On se propose d'étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n\ln(n)} \quad \forall n \geqslant 2$$

1) Vérifier que la condition nécessaire de convergence (de la série) est vérifiée.

2) Calculer la dérivée de la fonction

$$F(x) = \ln(\ln(x))$$

3) Étudier la convergence de l'intégrale généralisée

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

4) En déduire, en vérifiant les hypothèses nécessaires, que la série

$$\left(\sum \frac{1}{n\ln(n)}\right)$$

diverge.

Exercice IV (20 min, 3 points)
Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice V (20 min, 3 points)
Soit T le triange de sommets $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_T 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1) Représenter le domaine T.

2) Calculer l'intégrale I.