ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025

Session 1 **Semestre 4**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (20 min, 4 points)
On considère l'application ϕ définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x, y, z) = (y - 3z, x + 2z)$.

1) On montre que ϕ est une application linéaire :

$$\begin{aligned}\phi((x, y, z) + (x', y', z')) &= \phi(x + x', y + y', z + z') = ((y + y') - 3(z + z'), (x + x') + 2(z + z')) \\ &= (y - 3z, x + 2z) + (y' - 3z', x' + 2z') = \phi(x, y, z) + \phi(x', y', z')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(\lambda(x, y, z)) &= \phi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda y - 3\lambda z, \lambda x + 2\lambda z) \\ &= \lambda(y - 3z, x + 2z) = \lambda\phi(x, y, z)\end{aligned}$$

2) On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker\phi \iff \phi(x, y, z) = (0, 0) \iff \begin{cases} y - 3z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3z \\ x = -2z \end{cases} \iff X = z\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une base de $\ker\phi$ est donc le vecteur $(-2, 3, 1)'$. D'où $\dim\ker\phi = 1$.

3) On a $\phi(e_1) = \phi(1, 0, 0) = (0, 1)'$, $\phi(e_2) = \phi(0, 1, 0) = (1, 0)'$ et $\phi(e_3) = \phi(0, 0, 1) = (-3, 2)'$. D'où la matrice de ϕ

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4) On en déduit

$$\phi(3, 2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice II (40 min, 6 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1)

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 1)$$

2) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique.
On a donc $\lambda = 1$ ($\times 1$) et $\lambda = 3$ ($\times 2$).

3) Pour montrer que A est diagonalisable, on détermine les sous-espaces propres :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff (A - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} 4x + 2y - 2z = 0 \\ \hfill 2y = 0 \\ 4x + 4y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 2x \end{cases} \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Une base de E_1 est donc $\{(1,0,2)'\}$ et $\dim E_1 = 1$. De même,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \iff (A - 3I_3)X = 0 \iff \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 4x + 4y - 4z = 0 \end{cases} \iff z = x + y \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une base de E_3 est donc $\{(1,0,1)', (0,1,1)'\}$ et $\dim E_3 = 2$.
Comme la matrice A (3×3) possède 3 valeurs propres (en les comptant suivant leur ordre de multiplicité) et comme $\dim E_1 = 1 = o(1)$ et $\dim E_3 = 2 = o(3)$, on en déduit que A est diagonalisable.

4) La matrice diagonale D associée à A est la matrice des valeurs propres.

5) La matrice de passage est la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs propres.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = PDP^{-1}$$

6) On sait que $A^k = PD^kP^{-1}$ avec

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

Exercice III (30 min, 5 points)
On considère l'équation récurrente

$$(E) \quad 3u_{n+2} + 8u_{n+1} - 3u_n = 10 \times 3^{-n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

1) L'équation homogène (E_0) est $3v_{n+2}8v_{n+1} - 3v_n = 0$. Son équation caractéristique est donc $3r^2 + 8r - 3 = 0$. Ses racines sont $r_1 = -3$ et $r_2 = 1/3$. La solution générale de (E_0) est donc $\boxed{v_n = K_1(-3)^n + K_2 3^{-n}}$.

2) Le second membre de (E) étant de la forme 3^{-n}, on cherche une solution particulière sous la forme $\bar{u}_n = Kn3^{-n}$ (car $K3^{-n}$ est déjà solution de l'équation homogène).
On a $\bar{u}_{n+1} = \frac{K}{3}(n+1)3^{-n}$ et $\bar{u}_{n+2} = \frac{K}{9}(n+2)3^{-n}$. En remplaçant dans (E) on trouve

$$(E) \implies 3\frac{K}{9}(n+2)3^{-n} + 8\frac{K}{3}(n+1)3^{-n} - 3Kn3^{-n} = 10 \times 3^{-n} \iff \left(\frac{K}{3} + \frac{8K}{3} - 3K\right)n + \frac{2K}{3} + \frac{8K}{3} = 10$$
$$\iff \frac{10K}{3} = 10 \iff K = 3$$

D'où la solution particulière de (E) : $\boxed{\bar{u}_n = 3n3^{-n}}$.

3) La solution générale de (E) est donc

$$u_n = v_n + \bar{u}_n = K_1(-3)^n + K_2 3^{-n} + 3n3^{-n}$$

4) Montrer qu'il existe une unique solution $(\tilde{u}_n)$ de (E) ayant une limite finie lorsque n tend vers l'infini et vérifiant $\tilde{u}_0 = 1$.
On a

$$\lim_n \widehat{u}_n = K_1 \lim_n (-3)^n + K_2 \lim_n 3^{-n} + 3 \lim_n n3^{-n} = K_1 \lim_n (-3)^n + 0 + 0 \in \mathbb{R} \iff K_1 = 0$$

D'où

$$\widehat{u}_0 = 1 \iff K_2 3^0 + 0 = 1 \iff K_1 = 1$$

Finalement, $\boxed{\widehat{u}_n = 3^{-n} + 3n3^{-n}}$.

Exercice IV (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$t^2 x'(t) + x(t) = \mathrm{e}^{1/t} \quad (E)$$

On réécrit l'équation (E) sous forme résolue :

$$(E) \qquad x'(t) + \frac{1}{t^2}x(t) = \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{1/t}$$

L'équation (E) n'est donc définie que lorsque $t \neq 0$. De manière à travailler sur un intervalle, on suppose que $t > 0$.

1) La solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0) est

$$(E_0) \iff x'(t) + \frac{1}{t^2}x(t) = 0 \iff \frac{x'(t)}{x(t)} = -\frac{1}{t^2} \iff \ln|x(t)| = \frac{1}{t} + \mathrm{Cste} \iff \boxed{x_h(t) = K\mathrm{e}^{1/t}}$$

où K est une constante réelle.

2) On cherche une solution particulière $x_p(t)$ de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante :

$$x_p(t) = K(t)\mathrm{e}^{1/t} \implies x_p'(t) = K'(t)\mathrm{e}^{1/t} - \frac{K(t)}{t^2}\mathrm{e}^{1/t}$$

En remplaçant dans (E), on trouve

$$(E) \implies K'(t)\mathrm{e}^{1/t} - \frac{K(t)}{t^2}\mathrm{e}^{1/t} + \frac{1}{t^2}K(t)\mathrm{e}^{1/t} = \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{1/t} \implies K'(t) = \frac{1}{t^2} \implies K(t) = \frac{-1}{t}$$

Une solution particulière de (E) est donc

$$\boxed{x_p(t) = \frac{-1}{t}\mathrm{e}^{1/t}}$$

3) La solution générale $x(t)$ de (E) est alors

$$\boxed{x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = K\mathrm{e}^{1/t} - \frac{1}{t}\mathrm{e}^{1/t}}$$

Elle est définie pour $t > 0$ (cf début de l'exercice).

4) On a

$$\tilde{x}(1) = \mathrm{e} \iff K\mathrm{e} - \mathrm{e} = \mathrm{e} \iff K = 2$$

D'où l'unique solution $\boxed{\tilde{x}(t) = 2\mathrm{e}^{1/t} - \frac{1}{t}\mathrm{e}^{1/t}}$.

5) La limite de $\tilde{x}(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 2 \times \mathrm{e}^0 + 0 = 2$$