Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025

Session 1 **Semestre 4**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Exercice I (20 min, 4 points)
On considère l'application ϕ définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x, y, z) = (y - 3z, x + 2z)$.

1) Montrer que ϕ est une application linéaire.

2) Déterminer le noyau $\ker\phi$ de ϕ. Quelle est sa dimension ?

3) Donner la matrice de ϕ dans les bases canoniques.

4) A l'aide de cette matrice, calculer $\phi(3, 2, 1)$.

Exercice II (40 min, 6 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2) En déduire les valeurs propres de A.

3) Montrer que A est diagonalisable.

4) Donnez la matrice diagonale D associée à A.

5) Déterminer la matrice de passage P. Quelle relation existe-t-il entre A, P et D ?

6) Exprimer A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$ (sans faire les calculs).

Exercice III (30 min, 5 points)
On considère l'équation récurrente

$$(E) \quad 3u_{n+2} + 8u_{n+1} - 3u_n = 10 \times 3^{-n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

1) Déterminer la solution générale de l'équation homogène (E_0).

2) Trouver une solution particulière de (E).

3) Donner la solution générale de (E).

4) Montrer qu'il existe une unique solution $(\tilde{u}_n)$ de (E) ayant une limite finie lorsque n tend vers l'infini et vérifiant $\tilde{u}_0 = 1$.

Exercice IV (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$t^2 x'(t) + x(t) = \mathrm{e}^{1/t} \quad (E)$$

1) Déterminer la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0).

2) En utilisant la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière $x_p(t)$ de (E).

3) Donner la solution générale $x(t)$ de (E). Sur quel intervalle est-elle définie ?

4) Montrer qu'il existe une unique solution $\tilde{x}(t)$ vérifiant $\tilde{x}(1) = \mathrm{e}$.

5) Calculer la limite de $\tilde{x}(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.