Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 5 points)
On considère le problème de minimisation suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{minimiser } f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x \\ \text{sous les contraintes } y - 2x \leqslant 1 \text{ et } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1) La fonction $x \mapsto x^2 + 2x$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ de la variable x. La fonction $y \mapsto y^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ de la variable y.
Donc $f(x,y)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

2) Les contraintes se réécrivent $y - 2x - 1 \leqslant 0$ et $-x \leqslant 0$. Le lagrangien associé à (P) est

$$L(x,y,\mu_1,\mu_2) = x^2 + y^2 + 2x + \mu_1(y - 2x - 1) + \mu_2(-x)$$

Les CNO de KT sont alors

$$L'_x(x,y,\mu_1,\mu_2) = 2x + 2 - 2\mu_1 - \mu_2 = 0 \quad L'_y(x,y,\mu_1,\mu_2) = 2y + \mu_1 = 0 \tag{1}$$
$$\mu_1(y - 2x - 1) = 0 \qquad \mu_2(-x) = 0 \tag{3}$$
$$\mu_1 \geqslant 0 \qquad \mu_2 \geqslant 0 \tag{4}$$
$$y - 2x - 1 \leqslant 0 \qquad -x \leqslant 0 \tag{5}$$

3) Pour résoudre le problème (P), on étudie successivement les 4 cas suivants :

- $\mu_1 = \mu_2 = 0$: les équations (1) donne $x = -1$ qui ne vérifie pas la seconde contrainte ($x \geqslant 0$). Ce cas est donc impossible.
- $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 = 0$: Les équations (3) donnent $y = 2x + 1$. En replaçant dans les équations (1), on trouve :

$$\begin{cases} 2x + 2 - 2\mu_1 = 0 \\ 4x + 2 + \mu_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \mu_1 - 1 \\ 4\mu_1 - 4 + 2 + \mu_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2/5 - 1 = -3/5 \\ \mu_1 = 2/5 \end{cases}$$

  Comme $x = -3/5$ ne vérifie pas la contrainte $x \geqslant 0$, ce cas est impossible.
- $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 > 0$: les équations (3) donnent $x = 0$. En remplaçant dans les équations (1), on trouve

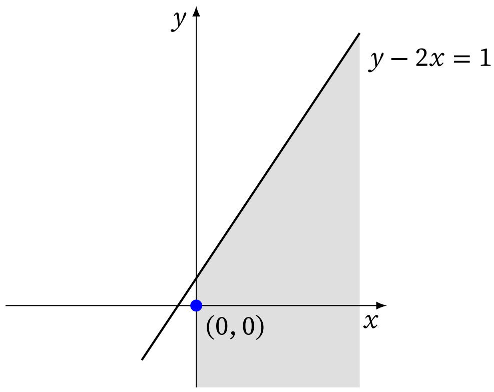
$$\begin{cases} 2 - \mu_2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu_2 = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

  On trouve donc un point candidat $(x_0, y_0) = (0,0)$ avec $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 2$.
- $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$. Les équation (3) donnent $(x,y) = (0,1)$. En remplaçant dans les équations (1), on trouve $\mu_1 = -2 \ngeqslant 0$. Donc ce cas est impossible

En conclusion, le problème (P) admet un unique point critique $(x_0, y_0) = (0,0)$ avec $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 2$.

Les contraintes sont qualifiées car affines. Comme la fonction f est convexe et les contraintes sont convexes (car affines), on en déduit que (P) admet un minimum global en $(x_0, y_0) = (0,0)$.

4) La zone grisée correspond aux points admissibles (vérifiant les contraintes).



Exercice II (30 min, 5 points)
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = \frac{1}{3} \qquad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{u_n^2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) On a $u_1 = 7/27$.
2) Pour montrer que la suite est à termes strictement positifs, on fait une raisonnement par récurrence : $u_0 = 1/3 > 0$. On suppose que $u_n > 0$. On a alors

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{2}{3}u_n}_{>0} + \underbrace{\frac{u_n^2}{3}}_{>0} > 0$$

Donc la suite est à termes strictement positifs.
3) On procède de même pour vérifier que la suite est majorée par 1 : $u_0 = 1/3 \leqslant 1$. On suppose $u_n \leqslant 1$. On a alors

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{u_n^2}{3} \leqslant \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

4) Comme $u_n > 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{3}u_n + \frac{u_n^2}{3}}{u_n} = \frac{2}{3} + \frac{u_n}{3} \leqslant \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

La suite est donc décroissante.
5) La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0), donc elle converge.
6) On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2$ une fonction continue. Pour $\ell = \lim u_n$, on a $\ell = f(\ell)$. D'où

$$\ell = \frac{2}{3}\ell + \frac{\ell^2}{3} \iff 3\ell = 2\ell + \ell^2 \iff \ell^2 - \ell = 0 \iff \ell(\ell - 1) = 0 \iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1$$

Comme la suite est décroissante et $u_0 = 1/3$, sa limite ne peut être que $\ell = 0$.

Exercice III (20 min, 3 points)
On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) On a

$$0 \leqslant u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \leqslant \frac{1}{4n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

La série $\left(\Sigma \frac{1}{n^2}\right)$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). On en déduit que la série (Σu_n) converge.
2) On vérifie que

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(2n+3)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}\right] = u_n$$

3) On calcule la somme partielle :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1)} - \frac{1}{2n+1}\right) + \left(\frac{1}{2n+1)} - \frac{1}{2n+3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+3}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{aligned}$$

Exercice IV (20 min, 4 points)
L'intégrale I est convergente car

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{2}\,\mathrm{e}^{-b^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

L'intégrale J cdiverge car

$$\frac{\sqrt{t}+1}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge car } \alpha = 1 \not< 1 \implies J = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}+1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}$$

L'intégrale K se décompose en deux intégrales :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+t^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+t^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+t^2}\,\mathrm{d}x = K_1 + K_2$$

L'intégrale K_1 converge (en 0) car

$$\frac{1}{\sqrt{x}+t^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge car } \alpha = 1/2 < 1$$

L'intégrale K_2 converge (en $+\infty$) car

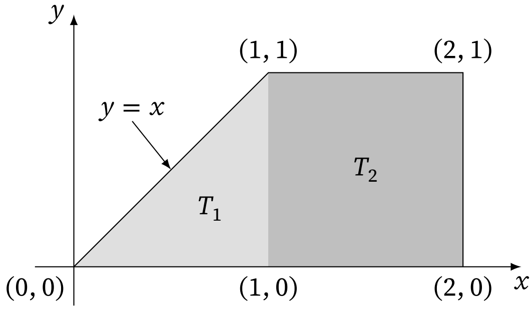
$$\frac{1}{\sqrt{x}+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge car } \alpha = 2 > 1$$

Les intégrales K_1 et K_2 convergeant, il est en de même de K.

Exercice V (20 min, 3 points)
Soit T le trapèze de sommets $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_T 2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1) Le trapèze T se décompose en un triangle T_1 et un carré T_2 :



On a

$$(x,y) \in T_1 \iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{cases} \qquad (x,y) \in T_2 \iff \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

2) On a

$$I = \iint_{T_1} 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{T_2} 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_1 + I_2$$

On calcule chacune des intégrales séparément :

$$I_1 = \iint_{T_1} 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^x 2y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[y^2\right]_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

et

$$I_2 = \iint_{T_2} 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^1 2y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[y^2\right]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x = \int_1^2 1\,\mathrm{d}x = 1$$

D'où $I = 1/3 + 1 = 4/3$.