Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2024-2025**

**Session 1** **Semestre 3**

# Licence Economie-Gestion – 2e année

**Matière :** Mathématiques Appliquées **Durée :** 2 heures
**Enseignant :** Vincent Jalby

**Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.**

**Exercice I** (30 min, 5 points)
On considère le problème de maximisation suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} \text{minimiser } f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x \\ \text{sous les contraintes } y - 2x \leqslant 1 \text{ et } x \geqslant 0. \end{cases}$$

**1)** Montrer que la fonction $f(x,y)$ est convexe.

**2)** Enoncer les conditions de Kuhn-Tucker associées à $(P)$.

**3)** Résoudre le problème $(P)$.

**4)** Représenter graphiquement l'ensemble des points admissibles (vérifiant les contraintes) en indiquant la solution de $(P)$.

**Exercice II** (30 min, 5 points)
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = \frac{1}{3} \qquad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{u_n^2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**1)** Calculer $u_1$.

**2)** Montrer que la suite est à termes strictement positifs.

**3)** Montrer que la suite est majorée par 1.

**4)** Etudier les variations de la suite.

**5)** En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

**6)** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

**Exercice III** (20 min, 3 points)
On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**1)** Montrer que la série $(\Sigma u_n)_n$ converge.

**2)** Vérifier que

$$u_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right]$$

**3)** En déduire la somme de la série.

**Exercice IV** (20 min, 4 points)
Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\infty} t\, e^{-t^2}\, dt \qquad J = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}+1}{t}\, dt$$

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} + t^2}\, dt$$

**Exercice V** (20 min, 3 points)
Soit $T$ le trapèze de sommets $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ et $I$ l'intégrale double définie par

$$I = \iint_T 2y\, dx dy$$

**1)** Représenter le domaine $T$.

**2)** Calculer l'intégrale $I$.