Faculté de Droit & des Sciences Économiques
Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023-2024

Session 1 **Semestre 4**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (20 min, 4 points)
On considère l'application ϕ définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x, y, z) = (x - 2z, y - 4x)$.

1) On montre que ϕ est une application linéaire :

$$\begin{aligned}\phi((x, y, z) + (x', y', z')) &= \phi(x + x', y + y', z + z') = ((x + x') - 2(z + z'), (y + y') - 4(x + x'))\\ &= (x - 2z, y - 4x) + (x' - 2z', y' - 4x') = \phi(x, y, z) + \phi(x', y', z')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(\lambda(x, y, z)) &= \phi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x - 2\lambda z, \lambda y - 4\lambda x)\\ &= \lambda(x - 2z, y - 4x) = \lambda\phi(x, y, z)\end{aligned}$$

2) On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker\phi \iff \phi(x, y, z) = (0, 0) \iff \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{1}{2}x \\ y = 4x \end{cases} \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Une base de $\ker\phi$ est donc le vecteur $(1, 4, 1/2)'$. D'où $\dim\ker\phi = 1$.

3) On a $\phi(e_1) = \phi(1, 0, 0) = (1, -4)'$, $\phi(e_2) = \phi(0, 1, 0) = (0, 1)'$ et $\phi(e_3) = \phi(0, 0, 1) = (-2, 0)'$. D'où la matrice de ϕ

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) On en déduit

$$\phi(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Exercice II (40 min, 6 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & 6 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ -3 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 6 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

2) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique.
On a donc $\lambda = -1$ ($\times 1$) et $\lambda = 2$ ($\times 2$).

3) Pour montrer que A est diagonalisable, on détermine les sous-espaces propres :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff (A + I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -3x + 6z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \\ -3x + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases} \iff X = z\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une base de E_1 est donc $\{(2, -1, 1)'\}$ et $\dim E_{-1} = 1$. De même,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff (A - 2I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -6x + 6z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \end{cases} \iff z = x \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une base de E_2 est donc $\{(1, 0, 1)', (0, 1, 0)'\}$ et $\dim E_2 = 2$.
Comme la matrice A (3×3) possède 3 valeurs propres (en les comptant suivant leur ordre de multiplicité) et que $\dim E_{-1} = 1 = o(-1)$ et $\dim E_2 = 2 = o(2)$, on en déduit que A est diagonalisable.

4) La matrice diagonale D associée à A est la matrice des valeurs propres.

5) La matrice de passage est la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs propres.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = PDP^{-1}$$

6) On sait que $A^k = PD^kP^{-1}$ avec

$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Exercice III (30 min, 5 points)
On considère l'équation récurrente

$$(E) \quad u_{n+2} - 9u_n = \frac{8n + 10}{n^2 - 1} \qquad n \geqslant 2$$

1) L'équation homogène (E_0) est $v_{n+2} - 9v_n = 0$. Son équation caractéristique est donc $r^2 - 9 = 0$. Ses racines sont $r_1 = -3$ et $r_2 = 3$. La solution générale de (E_0) est donc $\boxed{v_n = K_1(-3)^n + K_2 3^n}$.

2) On cherche une solution particulière sous la forme $\bar{u}_n = \dfrac{\lambda}{n-1}$. On a $\bar{u}_{n+2} = \dfrac{\lambda}{n+1}$. En remplaçant dans (E) on trouve

$$\begin{aligned} (E) \implies \frac{\lambda}{n+1} - 9\frac{\lambda}{n-1} = \frac{8n+10}{n^2-1} &\iff \frac{\lambda(n-1) - 9\lambda(n+1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{8n+10}{n^2-1} \\ &\iff \frac{-8\lambda n - 10\lambda}{(n+1)(n-1)} = \frac{8n+10}{n^2-1} \iff \lambda = -1 \end{aligned}$$

D'où la solution particulière de (E) : $\boxed{\bar{u}_n = \dfrac{-1}{n-1}}$.

3) La solution générale de (E) est donc

$$\boxed{u_n = v_n + \bar{u}_n = K_1(-3)^n + K_2 3^n - \frac{1}{n-1}} \qquad n \geqslant 2$$

4) On a

$$\lim_n \widehat{u}_n = K_1 \lim_n (-3)^n + K_2 \lim_n 3^n - \frac{2}{3} \lim_n \frac{1}{n-1} = K_1 \times (\pm\infty) + K_2 \times (+\infty) + 0 \implies K_1 = 0 \text{ et } K_2 > 0$$

D'où

$$\widehat{u}_2 = 9K_2 - 1 = 8 \iff K_2 = 1$$

Finalement, $\boxed{\widehat{u}_n = 3^n - \frac{1}{n-1}}$.

Exercice IV (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$t^2 x'(t) + 3t x(t) = \mathrm{e}^{t^2} \quad (E)$$

L'équation (E) se réécrit

$$x'(t) + \frac{3}{t} x(t) = \frac{1}{t^2} \mathrm{e}^{t^2} \quad (E)$$

On résoudra donc cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ (i.e., $t > 0$).

1) La solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0) est

$$x'(t) + \frac{3}{t} x(t) = 0 \implies \frac{x'(t)}{x(t)} = -\frac{3}{t} \implies x(t) = \frac{K}{t^3}$$

2) Pour trouver une solution particulière $x_p(t)$ de (E), on utilise la méthode de variation de la constante :

$$x_p(t) = \frac{K(t)}{t^3} \qquad (E) \implies K'(t) = t\,\mathrm{e}^{t^2} \implies K(t) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{t^2} \implies x_p(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2t^3}$$

3) La solution générale $x(t)$ de (E) est donc

$$x(t) = \frac{K}{t^3} + \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2t^3}$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) La condition initiale $\hat{x}(1) = \mathrm{e}$ donne $K = \mathrm{e}/2$. Donc la solution est unique et est égale à

$$\hat{x}(t) = \frac{\mathrm{e}}{2t^3} + \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2t^3} = \frac{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{t^2}}{2t^3}$$