Faculté de Droit & des Sciences Économiques
Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023-2024

Session 1 **Semestre 4**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Exercice I (20 min, 4 points)
On considère l'application ϕ définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x, y, z) = (x - 2z, y - 4x)$.

1) Montrer que ϕ est une application linéaire.

2) Déterminer le noyau $\ker \phi$ de ϕ. Quelle est sa dimension ?

3) Donner la matrice de ϕ dans les bases canoniques.

4) A l'aide de cette matrice, calculer $\phi(1, 2, 3)$.

Exercice II (40 min, 6 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2) En déduire les valeurs propres de A.

3) Montrer que A est diagonalisable.

4) Donnez la matrice diagonale D associée à A.

5) Déterminer la matrice de passage P. Quelle relation existe-t-il entre A, P et D ?

6) Exprimer A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$ (sans faire les calculs).

Exercice III (30 min, 5 points)
On considère l'équation récurrente

$$(E) \quad u_{n+2} - 9u_n = \frac{8n + 10}{n^2 - 1} \qquad n \geqslant 2$$

1) Déterminer la solution générale de l'équation homogène (E_0).

2) Montrer qu'il existe une solution particulière de (E) de la forme $\bar{u}_n = \dfrac{\lambda}{n-1}$.

3) Donner la solution générale de (E).

4) Montrer qu'il existe une unique solution $(\hat{u}_n)$ de (E) vérifiant $\hat{u}_2 = 8$ et telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{u}_n = +\infty$.

Exercice IV (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$t^2 x'(t) + 3tx(t) = \mathrm{e}^{t^2} \quad (E)$$

1) Déterminer la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0).

2) En utilisant la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière $x_p(t)$ de (E).

3) Donner la solution générale $x(t)$ de (E). Sur quel intervalle est-elle définie ?

4) Montrer qu'il existe une unique solution $\hat{x}(t)$ vérifiant $\hat{x}(1) = \mathrm{e}$.