Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023-2024

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 5 points)
On considère le problème de maximisation suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} \text{maximiser } f(x,y) = 1 - x - y^2 \\ \text{sous les contraintes } x \geqslant 0 \text{ et } y - x \geqslant 1. \end{cases}$$

1) La fonction $x \mapsto 1 - x$ est une fonction affine (donc concave) sur $\mathbb{R}$ de la variable x. La fonction $y \mapsto -y^2$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}$ de la variable y. Donc $f(x,y)$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de deux fonctions concaves.

2) Les contraintes se réécrivent $-x \leqslant 0$ et $1 + x - y \leqslant 0$. Le lagrangien est

$$L = 1 - x - y^2 + \mu_1(-x) + \mu_2(1 + x - y)$$

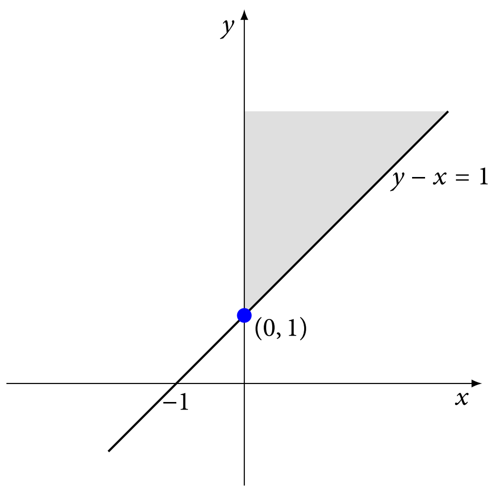
Les CNO de KT sont alors

$$L'_x = 0 = -1 - \mu_1 + \mu_2 \quad L'_y = 0 = -2y - \mu_2 \tag{1}$$
$$\mu_1(-x) = 0 \qquad \mu_2(1 + x - y) = 0 \tag{3}$$
$$\mu_1 \leqslant 0 \qquad \mu_2 \leqslant 0 \tag{4}$$
$$-x \leqslant 0 \qquad 1 + x - y \leqslant 0 \tag{5}$$

3) Pour résoudre le problème (P), on étudie successivement les 4 cas :
- $\mu_1 = \mu_2 = 0$: la première équation (1) donne $0 = -1$. Ce cas est donc impossible.
- $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 < 0$: la première équation (1) donne $\mu_2 = +1 \nleqslant 0$. Ce cas est donc impossible.
- $\mu_1 < 0$ et $\mu_2 = 0$: les équations (1) donnent $\mu_1 = -1$ et $y = 0$. Les équations (3) donnent $x = 0$. Or la contrainte $y - x \geqslant 1$ n'est pas vérifiée pour $(x,y) = (0,0)$. Ce cas est donc impossible.
- $\mu_1 < 0$ et $\mu_2 < 0$: les équations (3) donnent $x = 0$ et $y = 1$. Les équations (1) donnent alors $\mu_2 = -2$ et $\mu_1 = -3$. Les inégalités (4) et (5) sont bien vérifiées.

On a donc un point candidat en $(0,1)$. Les contraintes sont qualifiées car elles sont affines. La fonction f étant concave et les contraintes convexes (car affines), le problème (P) admet donc un maximum en $(0,1)$.

4) Représenter graphiquement l'ensemble des points admissibles (vérifiant les contraintes) en indiquant la solution de (P).



Exercice II (30 min, 5 points)
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) On a

$$u_1 = \frac{1/2}{2} + \frac{1/4}{4} = 5/16 \approx 0.3125 \qquad u_2 = \frac{5/16}{2} + \frac{25/2336}{4} \approx 0.1801$$

Calculer u_1 et u_2.

2) On montre par récurrence que la suite est à termes strictement positifs : $u_0 = 1/2 > 0$. On suppose que $u_n > 0$. On a alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} > 0 + 0 = 0$$

3) On montre par récurrence que la suite est majorée par 1 : $u_0 = 1/2 < 1$. On suppose que $u_n < 1$. On a alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} < 1/2 + 1/4 = 3/4 < 1$$

4) La suite (u_n) est strictement positive. Donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{u_n}{4} \leqslant 1/2 + 1/4 = 3/4 \leqslant 1$$

On en déduit que (u_n) est décroissante.

5) La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

6) On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x/2 + x^2/4$ continue. La limite ℓ de la suite vérifie donc

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = \ell/2 + \ell^2/4 \iff \ell(\ell/4 - 1/2) = 0 \iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 2$$

Comme (u_n) est majorée par 1, il en est de même de sa limite. Donc $\ell = 0$.

Exercice III (20 min, 3 points)
Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel.

1) La série

$$\left(\sum (1-2a)^n\right)$$

est une série géométrique de raison $(1-2a)$. Elle converge si et seulement si

$$-1 < 1-2a < 1 \iff -2 < -2a < 0 \iff 2 > 2a > 0 \iff 1 > a > 0 \iff a \in]0,1[$$

2) On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1-2a)^n = \frac{1}{1-(1-2a)} = \frac{1}{2a}$$

Exercice IV (20 min, 4 points)
On a

$$I = \int_0^\infty t^2\, \mathrm{e}^{-t^3}\, \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^2\, \mathrm{e}^{-t^3}\, \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-t^3}\right]_0^b = \frac{1}{3} \implies I \text{ converge}$$

$$\frac{\sqrt{t}+1}{t} \geqslant \frac{1}{t} \geqslant 0 \text{ et } \int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \implies J = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}+1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t^3}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}+t^3}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t^3}\,\mathrm{d}t = K_1 + K_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}+t^3} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \implies K_1 \text{ converge}$$

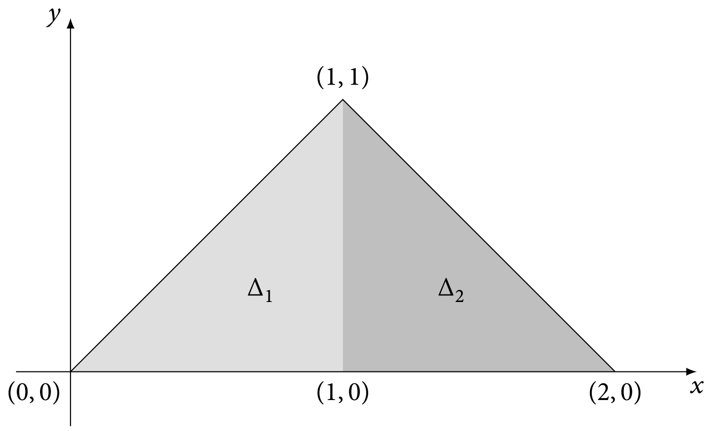
$$\frac{1}{\sqrt{t}+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \implies K_2 \text{ converge}$$

Donc K converge comme somme de deux intégrales convergentes.

Exercice V (20 min, 3 points)
Soit Δ le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_{\Delta} 2xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1) Représenter le domaine Δ.



On peut soit couper le domaine Δ en deux (Δ_1 et Δ_2) (et calculer deux intégrales) :

$$(x,y) \in \Delta_1 \iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{cases} \qquad (x,y) \in \Delta_2 \iff \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2-x \end{cases}$$

ou faire des *tranches horizontales* sur le domaine complet :

$$(x,y) \in \Delta \iff \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ y \leqslant x \leqslant 2-y \end{cases}$$

2) On calcule l'intégrale I en utilisant la seconde méthode :

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} 2xy \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[x^2 y\right]_{x=y}^{x=2-y} \mathrm{d}y = \int_0^1 4y - 4y^2 \,\mathrm{d}y = \left[2y^2 - \tfrac{4}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

En utilisant la première méthode, on trouve

$$I_1 = \iint_{\Delta_1} = \int_0^1 \left(\int_0^x 2xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \qquad I_2 = \iint_{\Delta_2} = \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} 2xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{5}{12} \qquad I = I_1 + I_2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{2}{3}$$