

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023-2024

Session 1

Semestre 3

Licence Economie-Gestion – 2^e année

Matière : Mathématiques Appliquées

Durée : 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Exercice I (30 min, 5 points)

On considère le problème de maximisation suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{maximiser } f(x, y) = 1 - x - y^2 \\ \text{sous les contraintes } x \geq 0 \text{ et } y - x \geq 1. \end{cases}$$

- 1) Montrer que la fonction $f(x, y)$ est concave.
- 2) Énoncer les conditions de Kuhn-Tucker associées à (P).
- 3) Résoudre le problème (P).
- 4) Représenter graphiquement l'ensemble des points admissibles (vérifiant les contraintes) en indiquant la solution de (P).

Exercice II (30 min, 5 points)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Montrer que la suite est à termes strictement positifs.
- 3) Montrer que la suite est majorée par 1.
- 4) Étudier les variations de la suite.
- 5) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.
- 6) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice III (20 min, 3 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel.

- 1) Déterminer pour quelles valeurs de a la série

$$\left(\sum (1 - 2a)^n \right)$$

est convergente.

- 2) Lorsqu'elle converge, déterminer la somme de la série.

Exercice IV (20 min, 4 points)

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^3} dt \quad J = \int_0^1 \frac{\sqrt{t} + 1}{t} dt$$

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} + t^3} dt$$

Exercice V (20 min, 3 points)

Soit Δ le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_{\Delta} 2xy \, dx dy$$

- 1) Représenter le domaine Δ .
- 2) Calculer l'intégrale I .