Faculté de Droit & des Sciences Économiques
Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022-2023

Session 1 **Semestre 4**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (20 min, 4 points)
On considère l'application ϕ définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x, y, z) = (2x + y, z - 3x)$.

1) On montre que ϕ est une application linéaire :

$$\begin{aligned}
\phi((x, y, z) + (x', y', z')) &= \phi(x + x', y + y', z + z') = (2(x + x') + (y + y'), (z + z') - 3(x + x')) \\
&= (2x + y, z - 3x) + (2x' + y', z' - 3x') = \phi(x, y, z) + \phi(x', y', z') \\
\phi(\lambda(x, y, z)) &= \phi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x + \lambda y, \lambda z - 3\lambda x) \\
&= \lambda(2x + y, z - 3x) = \lambda\phi(x, y, z)
\end{aligned}$$

2) On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker\phi \iff \phi(x, y, z) = (0, 0) \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = 3x \end{cases} \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Une base de $\ker\phi$ est donc le vecteur $(1, -2, 3)'$. D'où $\dim\ker\phi = 1$.

3) On a $\phi(e_1) = \phi(1, 0, 0) = (2, -3)'$, $\phi(e_2) = \phi(0, 1, 0) = (1, 0)'$ et $\phi(e_3) = \phi(0, 0, 1) = (0, 1)'$. D'où la matrice de ϕ

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) On en déduit

$$\phi(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice II (40 min, 6 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = -\lambda(2-\lambda)^2$$

2) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique. On a donc $\lambda = 0$ ($\times 1$) et $\lambda = 2$ ($\times 2$).

3) Pour montrer que A est diagonalisable, on détermine les sous-espaces propres :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \iff AX = 0 \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Une base de E_0 est donc $\{(1, 0, -1)'\}$ et $\dim E_0 = 1$. De même,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff (A - 2I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \iff z = x - 2y \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Une base de E_2 est donc $\{(1, 0, 1)', (0, 1, -2)'\}$ et $\dim E_2 = 2$.
Comme la matrice A (3×3) possède 3 valeurs propres (en les comptant suivant leur ordre de multiplicité) et que $\dim E_0 = 1 = o(0)$ et $\dim E_2 = 2 = o(2)$, on en déduit que A est diagonalisable.

4) La matrice diagonale D associée à A est la matrice des valeurs propres.

5) La matrice de passage est la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs propres.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A = PDP^{-1}$$

6) On sait que $A^k = PD^kP^{-1}$ avec

$$D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

7) La matrice A ayant une valeur propre nulle, elle ne peut pas être inversible.

Exercice III (30 min, 5 points)
On considère l'équation récurrente suivante :

$$2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 2^{-n} \qquad (E)$$

1) L'équation homogène (E_0) est $2v_{n+2} - 5v_{n+1} + 2v_n = 0$. Son équation caractéristique est donc $2r^2 - 5r + 2 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 9$ et ses racines sont $r_1 = 1/2$ et $r_2 = 2$. La solution générale de (E_0) est donc $\boxed{v_n = K_1 2^{-n} + K_2 2^n}$.

2) Le second membre de (E) étant 2^{-n}, on cherche une solution particulière sous la forme $\bar{u}_n = Kn2^{-n}$ (car $K2^{-n}$ est déjà solution de l'équation homogène).
On a $\bar{u}_{n+1} = \frac{K}{2}(n+1)2^{-n}$ et $\bar{u}_{n+2} = \frac{K}{4}(n+2)2^{-n}$. En remplaçant dans (E) on trouve

$$\begin{aligned} (E) \implies 2\frac{K}{4}(n+2)2^{-n} - 5\frac{K}{2}(n+1)2^{-n} + 2Kn2^{-n} = 2^{-n} &\iff \left(\frac{K}{2} - \frac{5K}{2} + 2K\right)n + K - \frac{5K}{2} = 1 \\ &\iff 0n - \frac{3K}{2} = 1 \iff K = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

D'où la solution particulière de (E) : $\boxed{\bar{u}_n = -\frac{2}{3}n2^{-n}}$.

3) La solution générale de (R) est donc

$$u_n = v_n + \bar{u}_n = K_1 2^{-n} + K_2 2^n - \frac{2}{3}n2^{-n}$$

4) On a

$$\lim_n \hat{u}_n = K_1 \lim_n 2^{-n} + K_2 \lim_n 2^n + \frac{5}{4}\lim_n n5^{-n} - \frac{2}{3}\lim_n n2^{-n} = 0 + K_2 \lim_n 2^n + 0 \in \mathbb{R} \iff K_2 = 0$$

D'où

$$\hat{u}_0 = 1 \iff K_1 2^0 + 0 = 1 \iff K_1 = 1$$

Finalement, $\boxed{\hat{u}_n = 2^{-n} - \frac{2}{3}n2^{-n}}$.

Exercice IV (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad tx'(t) - 3x(t) = 3t^4$$

On réécrit l'équation (E) sous forme résolue :

$$(E) \qquad x'(t) - \frac{3}{t}x(t) = 3t^3$$

L'équation (E) n'est donc définie que lorsque $t \neq 0$. De manière à travailler sur un intervalle, on suppose que $t > 0$.

1) La solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0) est

$$(E_0) \iff x'(t) - \frac{3}{t}x(t) = 0 \iff x'(t) = \frac{3}{t}x(t) \iff \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{3}{t} \iff \ln|x(t)| = 3\ln(t) + \text{Cste} \iff \boxed{x_h(t) = Kt^3}$$

où K est une constante réelle.

2) On cherche une solution particulière $x_p(t)$ de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante :

$$x_p(t) = K(t)t^3 \implies x_p'(t) = K'(t)t^3 + 3K(t)t^2$$

En remplaçant dans (E), on trouve

$$(E) \implies K'(t)t^3 + 3K(t)t^2 - \frac{3}{t}K(t)t^3 = 3t^3 \implies K'(t) = 3 \implies K(t) = 3t$$

Une solution particulière de (E) est donc

$$\boxed{x_p(t) = 3t \times t^3 = 3t^4}$$

3) La solution générale $x(t)$ de (E) est alors

$$\boxed{x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = Kt^3 + 3t^4}$$

Elle est définie pour $t > 0$ (cf début de l'exercice).

4) On a

$$\widehat{x}(1) = 2 \iff K + 3 = 2 \iff K = -1$$

D'où l'unique solution $\boxed{\widehat{x}(t) = -t^3 + 3t^4}$.