Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022-2023

Session 1 **Semestre 4**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Exercice I (20 min, 4 points)
On considère l'application ϕ définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x, y, z) = (2x + y, z - 3x)$.

1) Montrer que ϕ est une application linéaire.

2) Déterminer le noyau $\ker \phi$ de ϕ. Quelle est sa dimension ?

3) Donner la matrice de ϕ dans les bases canoniques.

4) A l'aide de cette matrice, calculer $\phi(1, 2, 3)$.

Exercice II (40 min, 6 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2) En déduire les valeurs propres de A.

3) Montrer que A est diagonalisable.

4) Donnez la matrice diagonale D associée à A.

5) Déterminer la matrice de passage P. Quelle relation existe-t-il entre A, P et D ?

6) Exprimer A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$ (sans faire les calculs).

7) La matrice A est-elle inversible ?

Exercice III (30 min, 5 points)
On considère l'équation récurrente suivante :

$$2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 2^{-n} \qquad (E)$$

1) Déterminer la solution générale (v_n) de l'équation homogène (E_0).

2) Trouver une solution particulière $(\bar{u}_n)$ de (E).

3) Donner la solution générale (u_n) de (E).

4) Montrer qu'il existe une unique solution $(\widehat{u}_n)$ de (E) ayant une limite finie (en $+\infty$) et vérifiant $\widehat{u}_0 = 1$.

Exercice IV (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad tx'(t) - 3x(t) = 3t^4$$

1) Déterminer la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0).

2) En utilisant la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière $x_p(t)$ de (E).

3) Donner la solution générale $x(t)$ de (E). Sur quel intervalle est-elle définie ?

4) Montrer qu'il existe une unique solution $\widehat{x}(t)$ vérifiant $\widehat{x}(1) = 2$.