Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022-2023

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 5 points)
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+8u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) On a $u_1 = 1/10$ et $u_2 = 1/18$.

2) On montre par récurrence que la suite est à termes positifs (et bien définie) : la propriété est vraie pour $n = 0$: $u_0 = 1/2 \geqslant 0$. On suppose $u_n \geqslant 0$ et on montre que u_{n+1} est bien défini et positif :

$$u_n \geqslant 0 \implies 1+8u_n > 0 \implies u_{n+1} = \frac{u_n}{1+8u_n} = \frac{\geqslant 0}{> 0} \geqslant 0$$

3) La suite (u_n) étant positive, on utilise le rapport u_{n+1}/u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{1+8u_n}}{u_n} = \frac{1}{1+8u_n} \leqslant 1 \quad \text{car } u_n \geqslant 0 \implies 1+8u_n \geqslant 1$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

4) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (car positive), donc elle converge.

5) La limite ℓ de la suite $(u_n)_n$ vérifie

$$\ell = \frac{\ell}{1+8\ell} \implies \ell(1+8\ell) = \ell \implies \ell + 8\ell^2 = \ell \implies 8\ell^2 = 0 \implies \ell = 0$$

La suite converge donc vers 0.

6) On considère la suite $(v_n)_n$ définie par

$$v_n = \frac{1}{u_n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

a) On a

$$v_{n+1} = 1/u_{n+1} = \frac{1+8u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 8 = v_n + 8$$

b) La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 8$. On a donc $v_n = v_0 + 8n = 2 + 8n$.

c) On en déduit que

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2+8n}$$

Exercice II (25 min, 4 points)
Soit $a \in \mathbb{R}^*$ un réel non nul.

1) La série

$$\left(\sum \left(1 - \tfrac{1}{a}\right)^n\right)$$

est une série géométrique de raison $q = 1 - \frac{1}{a}$ et de premier terme 1. Elle converge donc pour $|q| < 1$. D'où

$$\left|1 - \frac{1}{a}\right| < 1 \iff -1 < 1 - \frac{1}{a} < 1 \iff -2 < -\frac{1}{a} < 0 \iff 2 > \frac{1}{a} > 0 \iff \frac{1}{2} < a$$

La série converge donc pour tout $a \in \left]1/2, +\infty\right[$.

2) On sait que la somme d'une série géométrique de raison q et de premier terme 1 est $\frac{1}{1-q}$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \tfrac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{a})} = a$$

Exercice III (25 min, 4 points)

On considère les intégrales généralisées suivantes :

$$I = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1) L'intégrale I est convergente car

$$I = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1}$$

2) Pour tout $x \geqslant 1$, on a

$$x \geqslant 1 \implies \sqrt{x} \geqslant 1 \implies \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant 1 \implies \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \quad \text{car } \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0.$$

3) On a

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \quad \forall x \geqslant 1 \\ I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{converge} \end{array}\right\} \implies J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{converge}$$

4) On a

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = L + J$$

On sait déjà (question précédente) que J converge. Etudions la convergence de L (en 0) :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{0} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{converge } (\alpha = 1/2 < 1) \end{array}\right\} \implies L = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{converge}$$

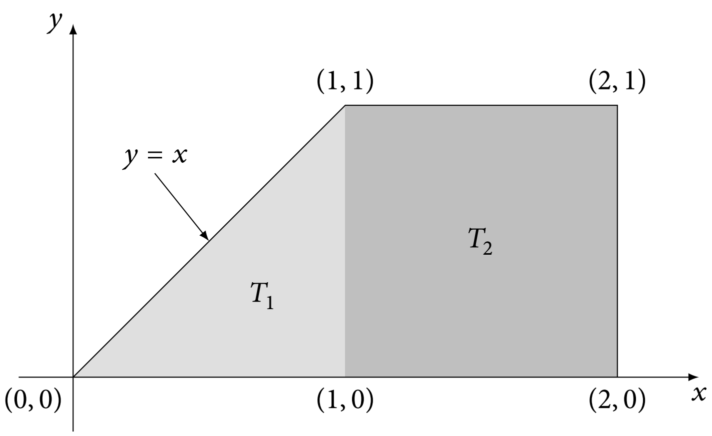
Donc K converge comme somme de deux intégrales convergentes.

Exercice IV (25 min, 4 points)

Soit T le trapèze de sommets $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_T 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

1) Le trapèze T se décompose en un triangle T_1 et un carré T_2 :



On a

$$(x, y) \in T_1 \iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{cases} \qquad (x, y) \in T_2 \iff \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

2) On a

$$I = \iint_{T_1} 2xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{T_2} 2xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = I_1 + I_2$$

On calcule chacune des intégrales séparément :

$$I_1 = \iint_{T_1} 2xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^x 2xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy^2 \right]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

et

$$I_2 = \iint_{T_2} 2xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^1 2xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_1^2 \left[xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x = \int_1^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{3}{2}$$

D'où $I = 1/4 + 3/2 = 7/4$.