Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2022-2023

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (15 min, 3 points)
On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(P)\begin{cases}\text{Maximiser } f(x,y)\\ \text{s.c. } g(x,y)=0 \text{ et } h(x,y)\leqslant 0\end{cases}$$

1) Donner les conditions nécessaires d'optimalité associées au problème (P).

2) Dans quel cas ces conditions sont-elles suffisantes ?

Exercice I (30 min, 5 points)
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0=\frac{1}{2} \qquad u_{n+1}=\frac{u_n}{1+8u_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer que la suite est à termes positifs (et bien définie).

3) Etudier les variations de la suite.

4) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

5) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

6) On considère la suite $(v_n)_n$ définie par

$$v_n=\frac{1}{u_n} \qquad n\in\mathbb{N}$$

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
c) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice II (25 min, 4 points)
Soit $a\in\mathbb{R}^*$ un réel non nul.

1) Déterminer pour quelles valeurs de a la série

$$\left(\sum\left(1-\tfrac{1}{a}\right)^n\right)$$

est convergente.

2) Lorsqu'elle converge, déterminer la somme de la série.

Exercice III (25 min, 4 points)
On considère les intégrales généralisées suivantes :

$$I=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad J=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1) Montrer que l'intégrale I est convergente.

2) Montrer que pour tout $x\geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x}\leqslant \mathrm{e}^{-x}$$

3) En déduire la convergence de l'intégrale J.

4) Etudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$K=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice IV (25 min, 4 points)
Soit T le trapèze de sommets $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ et I l'intégrale double définie par

$$I=\iint_T 2xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1) Représenter le domaine T.

2) Calculer l'intégrale I.