ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022

Session 1 **Semestre 4**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (10 min, 3 points)
Soit E un espace vectoriel réel et $\phi : E \to E$ une application linéaire.

1) Rappeler la définition d'une application linéaire.

2) Qu'appelle-t-on noyau ($\operatorname{Ker}\phi$) de l'application linéaire ϕ ?

3) Que pouvez-vous dire sur sa dimension ?

Exercice I (40 min, 6 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2) En déduire les valeurs propres de A.

3) Montrer que A est diagonalisable.

4) Donnez la matrice diagonale D associée à A.

5) Déterminer la matrice de passage P. Quelle relation existe-t-il entre A, P et D ?

6) Déterminer (explicitement) A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice II (40 min, 6 points)
On considère l'équation récurrente suivante :

$$5u_{n+2} + 24u_{n+1} - 5u_n = 3^{-n} \qquad (E)$$

1) Déterminer la solution générale (v_n) de l'équation homogène (E_0).

2) Trouver une solution particulière $(\bar{u}_n)$ de (E).

3) Donner la solution générale (u_n) de (E).

4) Montrer qu'il existe une unique solution $(\hat{u}_n)$ de (E) ayant une limite finie (en $+\infty$) et vérifiant $\hat{u}_0 = 41/32$.

Exercice III (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle suivante :

$$t^2 x'(t) - 2tx(t) = t^5 e^{t^2} \qquad (E)$$

1) Déterminer la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0).

2) En utilisant la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière $x_p(t)$ de (E).

3) Donner la solution générale $x(t)$ de (E). Sur quel intervalle est-elle définie ?

4) Montrer qu'il existe une unique solution $\hat{x}(t)$ vérifiant $\hat{x}(1) = e$.