

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022

Session 1

Semestre 3

Licence Economie-Gestion – 2^e année

Matière : Mathématiques Appliquées

Durée : 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Exercice I (30 min, 5 points)

On considère le problème de maximisation suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{maximiser } f(x, y) = 1 - x^2 - y \\ \text{sous les contraintes } y \geq 0 \text{ et } x - y \geq 2 \end{cases}$$

- 1) Montrer que la fonction $f(x, y)$ est concave.
- 2) Montrer que les contraintes sont qualifiées.
- 3) Énoncer les conditions de Kuhn-Tucker associées à (P).
- 4) Ces conditions sont-elles suffisantes ?
- 5) Résoudre le problème (P).
- 6) Représenter graphiquement l'ensemble des points admissibles (vérifiant les contraintes) en indiquant la solution de (P).

Exercice II (30 min, 5 points)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 7u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Montrer que la suite est à termes positifs (et bien définie).
- 3) Étudier les variations de la suite.
- 4) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.
- 5) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice III (20 min, 3 points)

Étudier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = e^{1/n} \quad v_n = \frac{n^2 + 1}{n^3} \quad w_n = \frac{3^n}{n!}$$

Exercice IV (20 min, 3 points)

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$I = \int_1^{+\infty} 2te^{-t^2} dt \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$$

$$K = \int_0^1 \frac{\sqrt{t} + 1}{t} dt$$

Exercice V (20 min, 4 points)

Soit T le trapèze de sommets $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 0)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_T 2xy \, dx \, dy$$

- 1) Représenter le domaine T .
- 2) Calculer l'intégrale I .