ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021

Session 1 **Semestre 4**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (20 min, 3 points)
On considère l'application ϕ définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x,y,z) = (z-x, x+2y)$.

1) On montre que ϕ est une application linéaire :

$$\begin{aligned}\phi((x,y,z)+(x',y',z')) &= \phi(x+x', y+y', z+z') = ((z-z')-(x+x'), (x+x')+2(y+y'))\\ &= (z-x, x+2y)+(z'-x', x'+2y') = \phi(x,y,z)+\phi(x',y',z')\\ \phi(\lambda(x,y,z)) &= \phi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda z-\lambda x, \lambda x+2\lambda y)\\ &= \lambda(z-x, x+2y) = \lambda\phi(x,y,z)\end{aligned}$$

2) On a $\phi(e_1) = \phi(1,0,0) = (-1,1)'$, $\phi(e_2) = \phi(0,1,0) = (0,2)'$ et $\phi(e_3) = \phi(0,0,1) = (1,0)'$. D'où la matrice de ϕ

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3) On en déduit

$$\phi(1,2,3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice II (40 min, 6 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^2$$

2) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristiques. On a donc $\lambda = 0$ ($\times 1$) et $\lambda = 1$ ($\times 2$).

3) Pour montrer que A est diagonalisable, on détermine les sous-espaces propres :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \iff AX = 0 \iff \begin{cases} -2x+y+2z = 0 \\ y = 0 \\ -3x+y+3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases} \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une base de E_0 est donc $\{(1,0,1)'\}$ et $\dim E_0 = 1$. De même,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff (A-I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -3x+y+2z = 0 \\ 0 = 0 \\ -3x+y+2z = 0 \end{cases} \iff y = 3x-2z \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une base de E_1 est donc $\{(1,3,0)', (0,-2,1)'\}$ et $\dim E_1 = 2$.
Comme la matrice A (3×3) possède 3 valeurs propres (en les comptant suivant leur ordre de multiplicité) et que $\dim E_0 = 1 = o(0)$ et $\dim E_1 = 2 = o(1)$, on en déduit que A est diagonalisable.

4) La matrice diagonale D associée à A est la matrice des valeurs propres.

5) La matrice de passage est la matrice des vecteurs propres.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = PDP^{-1}$$

6) On sait que $A^k = PD^kP^{-1}$. Or on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 0^k & 0 & 0 \\ 0 & 1^k & 0 \\ 0 & 0 & 1^k \end{pmatrix} = D$$

D'où $A^k = PDP^{-1} = A$.

Exercice III (20 min, 4 points)
Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'équation récurrente suivante :

$$(R) \qquad u_{n+1} - 2u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_0 = 1$$

La solution générale de l'équation homogène $(R_0) : v_{n+1} - 2v_n = 0$ est $\boxed{v_n = 2^n v_0}$.

Cas $a \neq 2$
On cherche une solution particulière sous la forme $\bar{u}_n = Ka^n$. En remplaçant dans (R) on trouve

$$Kaa^n - 2Ka^n = a^n \implies Ka - 2K = 1 \implies K = \frac{1}{a-2} \implies \boxed{\bar{u}_n = \frac{a^n}{a-2}}$$

D'où

$$u_n = v_n + \bar{u}_n = 2^n v_0 + \frac{a^n}{a-2} \qquad u_0 = 1 \implies v_0 + \frac{1}{a-2} = 1 \implies v_0 = 1 - \frac{1}{a-2} = \frac{a-3}{a-2} \implies \boxed{u_n = \frac{a-3}{a-2}2^n + \frac{a^n}{a-2}}$$

Cas $a = 2$
On cherche une solution particulière sous la forme $\bar{u}_n = Kn2^n$. En remplaçant dans (R) on trouve

$$K(n+1)2 \times 2^n - 2Kn2^n = 2^n \implies 2K = 1 \implies K = \frac{1}{2} \implies \boxed{\bar{u}_n = \frac{n}{2}2^n}$$

D'où

$$u_n = v_n + \bar{u}_n = 2^n v_0 + \frac{n}{2}2^n \qquad u_0 = 1 \implies v_0 = 1 \implies \boxed{u_n = 2^n + \frac{n}{2}2^n}$$

Exercice IV (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad t^2 x'(t) - 3x(t) = 3$$

On réécrit l'équation (E) sous forme résolue :

$$(E) \qquad x'(t) - \frac{3}{t^2}x(t) = \frac{3}{t^2}$$

L'équation (E) n'est donc définie que lorsque $t \neq 0$. De manière à travailler sur un intervalle, on suppose que $t > 0$.

1) La solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0) est

$$(E_0) \iff x'(t) = \frac{3}{t^2}x(t) \iff \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{3}{t^2} \iff \ln|x(t)| = \frac{-3}{t} + \text{Cste} \iff \boxed{x_h(t) = K\mathrm{e}^{-3/t}}$$

où K est une constante réelle.

2) On cherche une solution particulière $x_p(t)$ de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante :

$$x_p(t) = K(t)\mathrm{e}^{-3/t} \implies x_p'(t) = K'(t)\mathrm{e}^{-3/t} + \frac{3K(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-3/t}$$

En remplaçant dans (E), on trouve

$$(E) \implies K'(t)\mathrm{e}^{-3/t} + \frac{3}{t^2}K(t)\mathrm{e}^{-3/t} - \frac{3}{t^2}K(t)\mathrm{e}^{-3/t} = \frac{3}{t^2} \implies K'(t) = \frac{3}{t^2}\mathrm{e}^{3/t} \implies K(t) = -\mathrm{e}^{3/t}$$

Une solution particulière de (E) est donc

$$\boxed{x_p(t) = -\mathrm{e}^{3/t} \times \mathrm{e}^{-3/t} = -1} \quad !$$

3) La solution générale $x(t)$ de (E) est alors

$$\boxed{x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = K\mathrm{e}^{-3/t} - 1}$$

Elle est définie pour $t > 0$ (cf début de l'exercice).

4)

$$3 = \lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} K\mathrm{e}^{-3/t} - 1 = K - 1 \implies K = 4$$

D'où $\widehat{x}(t) = 4\mathrm{e}^{-3/t} - 1$ pour $t > 0$.