ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021

Session 1 **Semestre 4**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (10 min, 2 points)
Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

1) Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.

2) À quoi correspond sa dimension ?

Exercice I (20 min, 3 points)
On considère l'application ϕ définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x, y, z) = (z - x, x + 2y)$.

1) Montrer que ϕ est une application linéaire.

2) Donner la matrice de ϕ dans les bases canoniques.

3) A l'aide de cette matrice, calculer $\phi(1, 2, 3)$.

Exercice II (40 min, 6 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2) En déduire les valeurs propres de A.

3) Montrer que A est diagonalisable.

4) Donnez la matrice diagonale D associée à A.

5) Déterminer la matrice de passage P. Quelle relation existe-t-il entre A, P et D ?

6) Déterminer A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice III (20 min, 4 points)
Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'équation récurrente suivante :

$$(R) \qquad u_{n+1} - 2u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_0 = 1$$

En discutant suivant les valeurs de a, déterminer la solution de (R) .

Exercice IV (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad t^2 x'(t) - 3x(t) = 3$$

1) Déterminer la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0).

2) En utilisant la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière $x_p(t)$ de (E).

3) Donner la solution générale $x(t)$ de (E). Sur quel intervalle est-elle définie ?

4) Montrer qu'il existe une unique solution $\widehat{x}(t)$ vérifiant $\lim_{t \to +\infty} \widehat{x}(t) = 3$.