Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (40 min, 6 points)
On considère le problème de maximisation suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{maximiser } f(x,y) = 1 - x - y^2 \\ \text{sous les contraintes } x \geqslant 0 \text{ et } y - x \geqslant 2. \end{cases}$$

1) La fonction $x \mapsto 1 - x$ est une fonction affine (donc concave) sur $\mathbb{R}$ de la variable x. La fonction $y \mapsto -y^2$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}$ de la variable y. Donc $f(x,y)$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de deux fonctions convaves.

2) Les contraintes se réécrivent $-x \leqslant 0$ et $2 + x - y \leqslant 0$. Le lagrangien est

$$L = 1 - x - y^2 + \mu_1(-x) + \mu_2(2 + x - y)$$

Les CNO de KT sont alors

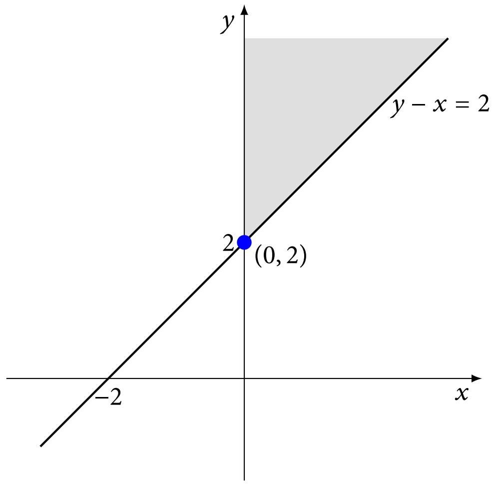
$$L'_x = 0 = -1 - \mu_1 + \mu_2 \quad L'_y = 0 = -2y - \mu_2 \tag{1}$$
$$\mu_1(-x) = 0 \qquad \mu_2(2 + x - y) = 0 \tag{3}$$
$$\mu_1 \leqslant 0 \qquad \mu_2 \leqslant 0 \tag{4}$$
$$-x \leqslant 0 \qquad 2 + x - y \leqslant 0 \tag{5}$$

3) Pour résoudre le problème (P), on étudie successivement les 4 cas :

- $\mu_1 = \mu_2 = 0$: la première équation (1) donne $0 = -1$. Ce cas est donc impossible.
- $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 < 0$: la première équation (1) donne $\mu_2 = 1 \nless 0$. Ce cas est donc impossible.
- $\mu_1 < 0$ et $\mu_2 = 0$: les équations (1) donnent $\mu_1 = -1$ et $y = 0$. La première équation (3) donne $x = 0$. On a alors $2 + x - y = 2 \nleqslant 0$. Ce cas est impossible.
- $\mu_1 < 0$ et $\mu_2 < 0$: les équations (3) donnent $x = 0$ et $y = 2$. Les équations (1) donnent alors $\mu_2 = -4$ et $\mu_1 = -5$. Les inégalités (4) et (5) sont bien vérifiées.

On a donc un point candidat en $(0, 2)$. Les contraintes sont qualifiées car elles sont affines. La fonction f étant concave et les contraintes convexes (car affines), le problème (P) admet donc un maximum en $(0, 2)$.

4) Représenter graphiquement l'ensemble des points admissibles (vérifiant les contraintes) en indiquant la solution de (P).



Exercice II (30 min, 5 points)
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) On a $u_1 = 1/5$ et $u_2 = 1/9$.

2) On montre par récurrence que la suite est à termes positifs (et bien définie). Le premier terme $u_0 = 1$ est bien positif (et bien défini). On suppose u_n défini et positif pour un certain n. Montrons qu'il en est de même pour u_{n+1} :

$$u_n \geqslant 0 \implies 1+4u_n > 0 \implies u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n} = \frac{\geqslant 0}{>0} \geqslant 0$$

3) La suite (u_n) étant positive, on utilise le rapport u_{n+1}/u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{1+4u_n}}{u_n} = \frac{1}{1+4u_n} \leqslant 1 \quad \text{car } u_n \geqslant 0 \implies 1+4u_n \geqslant 1$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

4) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (car positive), donc elle converge.

5) La limite ℓ de la suite $(u_n)_n$ vérifie

$$\ell = \frac{\ell}{1+4\ell} \implies \ell(1+4\ell) = \ell \implies \ell + 4\ell^2 = \ell \implies 4\ell^2 = 0 \implies \ell = 0$$

6) On considère la suite $(v_n)_n$ définie par

$$v_n = 1/u_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

a) On a

$$v_{n+1} = 1/u_{n+1} = \frac{1+4u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 4 = v_n + 4$$

b) La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 4$. On a donc $v_n = v_0 + 4n = 1 + 4n$.
c) On en déduit que

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1+4n}$$

Exercice III (15 min, 3 points)
Etudier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \frac{n+1}{n^2} \qquad v_n = \frac{2^n}{n!} \qquad w_n = \frac{e^n - 1}{e^n + 1}$$

On a

$$u_n = \frac{n+1}{n^2} \geqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \left(\sum \frac{1}{n}\right) \text{ diverge} \implies \left(\sum u_n\right) \text{ diverge}$$

En utilisant le critère de d'Alembert, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \implies \left(\sum v_n\right) \text{ converge}$$

En utilisant la condition nécessaire de convergence

$$\lim w_n = \lim \frac{e^n - 1}{e^n + 1} = \lim \frac{e^n}{e^n} = 1 \neq 0 \implies \left(\sum w_n\right) \text{ diverge}$$

Exercice IV (15 min, 3 points)
On considère les deux intégrales suivantes

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-t}\, dt \qquad J = \int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt$$

1) On a

$$J = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} (e^{-1} - e^{-b}) = e^{-1}$$

Donc J converge (et vaut e^{-1}).

2) Pour tout $t \geqslant 1$, on a

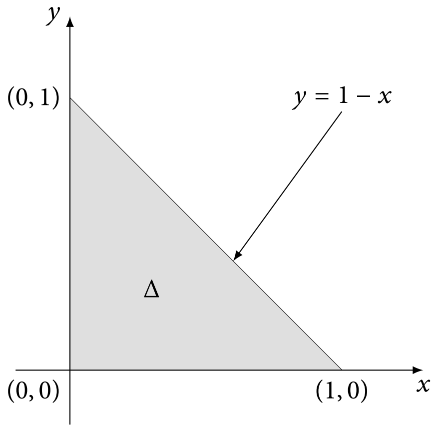
$$t \geqslant 1 \implies 0 \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1 \implies 0 \leqslant \frac{1}{t} e^{-t} \leqslant e^{-t}$$

3) On a vu que l'intégrale J converge. D'après l'inégalité précédente, on en déduit que l'intégrale I converge.

Exercice V (20 min, 3 points)
Soit Δ le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_\Delta 2xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1)



On voit que

$$(x,y) \in \Delta \iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x \end{cases}$$

2) L'intégrale I devient donc

$$I = \iint_\Delta 2\,xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2xy\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy^2 \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{12}$$