Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020-2021

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Exercice I (40 min, 6 points)
On considère le problème de maximisation suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} \text{maximiser } f(x, y) = 1 - x - y^2 \\ \text{sous les contraintes } x \geqslant 0 \text{ et } y - x \geqslant 2. \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction $f(x, y)$ est concave.

2) Enoncer les conditions de Kuhn-Tucker associées à (P).

3) Résoudre le problème (P).

4) Représenter graphiquement l'ensemble des points admissibles (vérifiant les contraintes) en indiquant la solution de (P).

Exercice II (30 min, 5 points)
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 4u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer que la suite est à termes positifs (et bien définie).

3) Etudier les variations de la suite.

4) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

5) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

6) On considère la suite $(v_n)_n$ définie par

$$v_n = 1/u_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
c) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice III (15 min, 3 points)
Etudier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \frac{n+1}{n^2} \qquad v_n = \frac{2^n}{n!} \qquad w_n = \frac{e^n - 1}{e^n + 1}$$

Exercice IV (15 min, 3 points)
On considère les deux intégrales suivantes

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-t} \, dt \qquad J = \int_1^{+\infty} e^{-t} \, dt$$

1) Montrer que l'intégrale J converge en calculant sa valeur.

2) Montrer que pour tout $t \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{t} e^{-t} \leqslant e^{-t}$$

3) En déduire que l'intégrale I converge.

Exercice V (20 min, 3 points)
Soit Δ le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_\Delta 2xy \, dx dy$$

1) Représenter le domaine Δ.

2) Calculer l'intégrale I.