Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (35 min, 6 points)
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+5u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) On a $u_1 = 1/6$ et $u_2 = 1/11$.

2) On montre par récurrence que la suite est à termes positifs (et bien définie). Le premier terme $u_0 = 1$ est bien positif (et bien défini). On suppose u_n défini et positif pour un certain n. Montrons qu'il en est de même pour u_{n+1} :

$$u_n \geqslant 0 \implies 1+5u_n > 0 \implies u_{n+1} = \frac{u_n}{1+5u_n} = \frac{\geqslant 0}{> 0} \geqslant 0$$

3) La suite (u_n) étant positive, on utilise le rapport u_{n+1}/u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{1+5u_n}}{u_n} = \frac{1}{1+5u_n} \leqslant 1 \quad \text{car } u_n \geqslant 0 \implies 1+5u_n \geqslant 1$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

4) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (car positive), donc elle converge.

5) La limite ℓ de la suite $(u_n)_n$ vérifie

$$\ell = \frac{\ell}{1+5\ell} \implies \ell(1+5\ell) = \ell \implies \ell + 5\ell^2 = \ell \implies 5\ell^2 = 0 \implies \ell = 0$$

6) On considère la suite $(v_n)_n$ définie par

$$v_n = 1/u_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

a) On a

$$v_{n+1} = 1/u_{n+1} = \frac{1+5u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 5 = v_n + 5$$

b) La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 5$. On a donc $v_n = v_0 + 5n = 1 + 5n$.
c) On en déduit que

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1+5n}$$

Exercice II (25 min, 4 points)
On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) On a

$$0 \leqslant u_n = \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \left(\Sigma \tfrac{1}{n^2}\right) \text{ converge} \implies (\Sigma\, u_n) \text{ converge.}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1) - bn}{n(n+1)} = \frac{(a-b)n + a}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = u_n \iff a = b = 1$$

3) La somme partielle S_n de la série est

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Exercice III (25 min, 4 points)

On a

$$I = \int_1^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b 2t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \left[-\mathrm{e}^{-t^2}\right]_1^b = \mathrm{e}^{-1} - \lim_{b\to+\infty} \mathrm{e}^{-b^2} = \mathrm{e}^{-1} \implies I \text{ converge}$$

On a

$$0 \leqslant \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} \leqslant \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \implies J \text{ converge}$$

On a

$$\frac{\sqrt{t}+1}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \implies K \text{ diverge}$$

Finalement,

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = L_1 + L_2$$

L'intégrale L_1 converge (en 0) car

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

L'intégrale L_2 converge (en $+\infty$) car

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-1} \text{ converge}$$

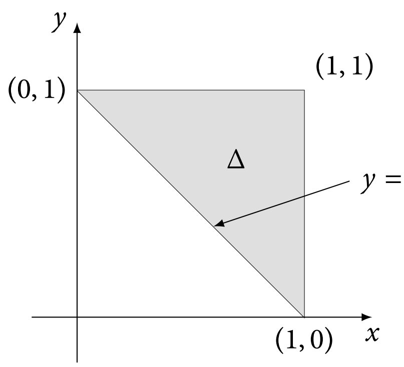
Donc L converge.

Exercice IV (20 min, 3 points)

Soit Δ le triangle de sommets $(0,1)$, $(1,1)$ et $(1,0)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_\Delta 4\,x^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1)



On voit que

$$(x,y) \in \Delta \iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1-x \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

2)

$$I = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 4x^2 y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[2x^2y^2\right]_{y=1-x}^{y=1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2x^2 - 2x^2(1-x)^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(4x^3 - 2x^4\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}$$