Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019-2020

Session 1 **Semestre 3**

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Question de cours (15 min, 3 points)
On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(P)\begin{cases}\text{Maximiser } f(x,y)\\ \text{s.c. } g(x,y)=0 \text{ et } h(x,y)\leqslant 0\end{cases}$$

1) Donner les conditions nécessaires d'optimalité associées au problème (P).

2) Dans quel cas ces conditions sont-elles suffisantes ?

Exercice I (35 min, 6 points)
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+5u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Montrer que la suite est à termes positifs (et bien définie).

3) Etudier les variations de la suite.

4) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

5) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

6) On considère la suite $(v_n)_n$ définie par

$$v_n = 1/u_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
c) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice II (25 min, 4 points)
On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que la série $(\Sigma u_n)_n$ converge.

2) Trouver deux réels a et b tels que

$$u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

3) En déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ de la série.

Exercice III (25 min, 4 points)
Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$I = \int_1^{+\infty} 2te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$K = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}+1}{t}\,\mathrm{d}t \quad L = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice IV (20 min, 3 points)
Soit Δ le triangle de sommets $(0,1)$, $(1,1)$ et $(1,0)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_\Delta 4\,x^2 y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1) Représenter le domaine Δ.

2) Calculer l'intégrale I.