ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

1re session | 4e semestre

Licences Economie-Gestion & MIASHS – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (45 min, 7 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 6 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -12 & 12 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ -12 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

2) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristiques. On a donc $\lambda = 1$ $(\times 2)$ et $\lambda = -1$ $(\times 1)$.

3) Pour montrer que A est diagonalisable, on détermine les sous-espaces vectoriels propres :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff (A + I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -4x + 6y + 2z = 0 \\ 2y = 0 \\ -12x + 12y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 2x \end{cases} \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Une base de E_{-1} est donc $\{(1,0,2)'\}$ et $\dim E_{-1} = 1$. De même,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff (A - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -6x + 6y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ -12x + 12y + 4z = 0 \end{cases} \iff z = 3x - 3y \iff X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Une base de E_1 est donc $\{(1,0,3)', (0,1,-3)'\}$ et $\dim E_1 = 2$.
Comme la matrice A (3×3) possède 3 valeurs propres (en les comptant suivant leur ordre de multiplicité) et que $\dim E_{-1} = 1 = o(-1)$ et $\dim E_1 = 2 = o(1)$, on en déduit que A est diagonalisable.

4) La matrice diagonale D associée à A est la matrice des valeurs propres.

5) La matrice de passage est la matrice des vecteurs propres.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad A = PDP^{-1}$$

6) On sait que $A^k = PD^kP^{-1}$.
Lorsque k est pair, $(-1)^k = 1$ et donc $D^k = I_3$. D'où $A^K = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
Lorsque k est impair, $(-1)^k = -1$ et donc $D^k = D$. D'où $A^k = PDP^{-1} = A$.

7) Les valeurs propres de A étant toutes non nulles, la matrice A est inversible (car son déterminant, produit des valeurs propres, est non nul).

Exercice II (30 min, 5 points)
On considère l'équation récurrente

$$(R) \quad 5u_{n+2} + 14u_{n+1} - 3u_n = 4 \times 5^{-n}$$

1) L'équation homogène (R_0) est $5v_{n+2} + 14v_{n+1} - 3v_n = 0$. Son équation caractéristique est donc $5r^2 + 14r - 3 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 16^2$ et ses racines sont $r_1 = -3$ et $r_2 = 1/5$. La solution générale de R_0 est donc $v_n = K_1(-3)^n + K_2 5^{-n}$.

2) On cherche une solution particulière de (R) sous la forme $(\bar{u}_n) = Kn5^{-n}$ (car 5^{-n} est solution de R_0). On a $\bar{u}_{n+1} = \frac{K}{5}(n+1)5^{-n}$ et $\bar{u}_{n+2} = \frac{K}{25}(n+2)5^{-n}$. En remplaçant dans (R) on trouve

$$(R) \implies 5\frac{K}{25}(n+2)5^{-n} + 14\frac{K}{5}(n+1)5^{-n} - 3Kn5^{-n} = 4 \times 5^{-n} \iff \left(\frac{K}{5} + \frac{14K}{5} - 3K\right)n + \frac{2K}{5} + \frac{14K}{5} = 4$$
$$\iff 0n + \frac{16K}{5} = 4 \iff K = \frac{5}{4}$$

D'où la solution particulière $\bar{u}_n = \frac{5}{4}n5^{-n}$.

3) Donner la solution générale de (R) est donc

$$u_n = v_n + \bar{u}_n = K_1(-3)^n + K_2 5^{-n} + \frac{5}{4}n5^{-n}$$

4) On a

$$\lim_n \widehat{u}_n = K_1 \lim_n (-3)^n + K_2 \lim_n 5^{-n} + \frac{5}{4}\lim_n n5^{-n} = K_1 \lim_n (-3)^n + 0 + 0 \in \mathbb{R} \iff K_1 = 0$$

D'où

$$\widehat{u}_0 = 1 \iff K_2 5^0 + \frac{5}{4} \times 0 \times 5^0 = 1 \iff K_2 = 1$$

Finalement, $\hat{u}_n = 5^{-n} + \frac{5}{4}n5^{-n}$.

Exercice III (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad t^2 x'(t) + 2x(t) = 2$$

On réécrit l'équation (E) sous forme résolue :

$$(E) \qquad x'(t) + \frac{2}{t^2}x(t) = \frac{2}{t^2}$$

L'équation (E) n'est donc définie que lorsque $t \neq 0$. De manière à travailler sur un intervalle, on suppose que $t > 0$.

1) La solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0) est

$$(E_0) \iff x'(t) = -\frac{2}{t^2}x(t) \iff \frac{x'(t)}{x(t)} = -\frac{2}{t^2} \iff \ln|x(t)| = \frac{2}{t} + \text{Cste} \iff x_h(t) = K\mathrm{e}^{2/t}$$

où K est une constante réelle.

2) On cherche une solution particulière $x_p(t)$ de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante :

$$x_p(t) = K(t)\mathrm{e}^{2/t} \implies x_p'(t) = K'(t)\mathrm{e}^{2/t} - \frac{2K}{t^2}\mathrm{e}^{2/t}$$

En remplaçant dans (E), on trouve

$$(E) \implies K'(t)\mathrm{e}^{2/t} - \frac{2}{t^2}K(t)\mathrm{e}^{2/t} + \frac{2}{t^2}K(t)\mathrm{e}^{2/t} = \frac{2}{t^2} \implies K'(t) = \frac{2}{t^2}\mathrm{e}^{-2/t} \implies K(t) = \mathrm{e}^{-2/t}$$

Une solution particulière de (E) est donc

$$x_p(t) = \mathrm{e}^{-2/t} \times \mathrm{e}^{2/t} = 1 \quad !$$

3) La solution générale $x(t)$ de (E) est alors

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = K\mathrm{e}^{2/t} + 1$$

Elle est définie pour $t > 0$ (cf début de l'exercice).

4)

$$3 = \lim_{t\to+\infty} \widehat{x}(t) = \lim_{t\to+\infty} K\mathrm{e}^{2/t} + 1 = K + 1 \implies K = 2$$

D'où $\widehat{x}(t) = 2\mathrm{e}^{2/t} + 1$ pour $t > 0$.