ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

1re session | 4e semestre

Licences Economie-Gestion & MIASHS – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées | **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Questions de cours (15 min, 3 points)
Soit E un espace vectoriel réel et $\phi : E \to E$ une application linéaire.

1) Rappeler la définition d'une application linéaire.

2) Qu'appelle-t-on noyau ($\ker \phi$) de l'application linéaire ϕ ?

3) Que pouvez-vous dire sur sa dimension ?

Exercice I (45 min, 7 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de A.

2) En déduire les valeurs propres de A.

3) Montrer que A est diagonalisable.

4) Donner la matrice diagonale D associée à A.

5) Déterminer la matrice de passage P. Quelle relation existe-t-il entre A, P et D ?

6) Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}$, peut-on déterminer la valeur de A^k sans faire de calculs (mais en le justifiant) ?

7) Sans <u>aucun</u> autre calcul, pensez-vous que A soit inversible ?

Exercice II (30 min, 5 points)
On considère l'équation récurrente

$$(R) \qquad 5u_{n+2} + 14u_{n+1} - 3u_n = 4 \times 5^{-n}$$

1) Déterminer la solution générale de l'équation homogène (R_0).

2) Trouver une solution particulière ($\bar{u}_n$) de (R).

3) Donner la solution générale de (R).

4) Montrer qu'il existe une unique solution ($\widehat{u}_n$) de (R) vérifiant $\widehat{u}_0 = 1$ et ayant une limite finie (quand n tend vers $+\infty$).

Exercice III (30 min, 5 points)
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad t^2 x'(t) + 2x(t) = 2$$

1) Déterminer la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène (E_0).

2) En utilisant la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière $x_p(t)$ de (E).

3) Donner la solution générale $x(t)$ de (E). Sur quel intervalle est-elle définie ?

4) Montrer qu'il existe une unique solution $\widehat{x}(t)$ vérifiant $\lim_{t \to +\infty} \widehat{x}(t) = 3$.