Faculté de Droit & des Sciences Économiques
Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

1re session | 3e semestre

Licence Economie-Gestion – 2e année

Matière : Mathématiques Appliquées – Éléments de correction | **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (15 min, 2 points)
Etudier les variations de la fonction ci-dessous :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

La fonction $f(x)$ est bien définie pour $x > 0$. On a

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \qquad f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

On obtient alors le tableau de variation de f :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $-\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

On a bien $f(x) \geqslant \sqrt{2}$ pour tout $x > 0$.

Exercice II (25 min, 4 points)
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) On a

$$u_1 = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \qquad u_2 = \frac{3/2}{2} + \frac{1}{3/2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} \approx 1.42$$

2) On montre par recurrence que la suite est à termes strictement positifs. On a $u_0 = 2 > 0$. On suppose $u_n > 0$. D'où

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{u_n}{2} > 0 \\ \dfrac{1}{u_n} > 0 \end{array}\right\} \implies u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} > 0$$

3) On montre par recurrence que la suite est minorée par $\sqrt{2}$. On a $u_0 = 2 \geqslant \sqrt{2}$. On suppose $u_n \geqslant \sqrt{2}$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée au précédent exercice, on a $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant \sqrt{2}$.

4) Pour étudier les variations de la suite, comme la suite est positive, on étudie le rapport :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{car} \quad u_n \geqslant \sqrt{2} \implies \frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

Le suite (u_n) est donc décroissante.

5) Le suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 (ou $\sqrt{2}$). Elle est donc convergente.

6) Soit ℓ la limite de (u_n). Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue, on doit donc avoir $\ell = f(\ell)$. Soit

$$\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell} \iff \ell^2 = \frac{\ell^2}{2} + 1 \iff \frac{\ell^2}{2} = 1 \iff \ell = \pm\sqrt{2}$$

Comme (u_n) est positive, $\ell = \lim u_n = \sqrt{2}$.

Exercice III (25 min, 4 points)

On a

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{4n^2 + 8n + 3} \implies 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{4n^2}$$

Comme la série $(\Sigma \frac{1}{n^2})$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), on en déduit que $(\Sigma u_n)_n$ converge.

1) On a

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(2n+3)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}\right] = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = u_n$$

2) On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right] + \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right] + \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right] + \cdots + \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{2n+1}} - \frac{1}{2n+3}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+3}\right]$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+3}\right] = \frac{1}{2}$$

Exercice IV (25 min, 4 points)

La première intégrale est de la forme $u'\mathrm{e}^u = (\mathrm{e}^u)'$:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-1/t}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \left[\mathrm{e}^{-1/t}\right]_1^b = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-1} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \quad \text{(donc converge)}$$

Pour étudier la convergence de la seconde intégrale (généralisée en $+\infty$), on utilise une majoration :

$$0 \leqslant \frac{t}{1+t^3} \leqslant \frac{t}{t^3} = \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{converge } (\alpha = 2 > 1) \implies J \text{ converge.}$$

Pour K (généralisée en 0), on utilise un équivalent (ou une minoration) :

$$0 \leqslant \frac{\sqrt{t}+1}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{diverge } (\alpha = 1 \not> 1) \implies K \text{ diverge.}$$

La dernière intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$:

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = L_1 + L_2$$

L'intégrale L_1 converge car

$$t \geqslant 0 \implies e^{-t} \leqslant 1 \implies 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \quad \text{converge } (\alpha = 1/2 < 1) \implies L_1 \text{ converge.}$$

L'intégrale L_2 converge car

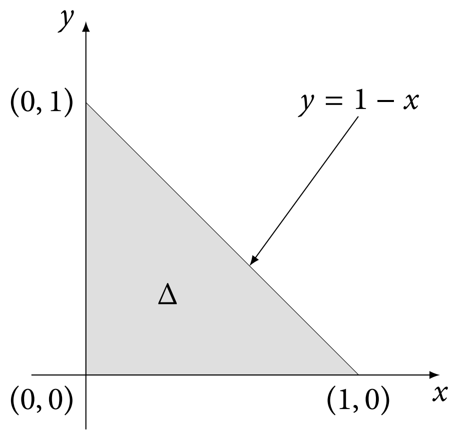
$$t \geqslant 1 \implies \frac{1}{\sqrt{t}} < 1 \implies \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leqslant e^{-t} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_1^{+\infty} = e^{-1} \implies L_2 \text{ converge.}$$

Donc L converge.

Exercice V (20 min, 3 points)
Soit Δ le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_\Delta 6\,xy\,dxdy$$

1)



On voit que

$$(x,y) \in \Delta \iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x \end{cases}$$

2) L'intégrale I devient donc

$$I = \iint_\Delta 6\,xy\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 6xy\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[3xy^2\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 (3x - 6x^2 + 3x^3)\,dx = \cdots = \frac{1}{4}$$