

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018-2019

1^{re} session

3^e semestre

Licence Economie-Gestion – 2^e année

Matière : Mathématiques Appliquées

Durée : 2 heures

Enseignant : Vincent Jalby

Calculatrices non-programmables et non graphiques autorisées. Aucun document autorisé.

Questions de cours (10 min, 3 points)

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Maximiser } f(x, y) \\ \text{s.c. } g(x, y) = 0 \text{ et } h(x, y) \leq 0 \end{cases}$$

- 1) Donner les conditions nécessaires d'optimalité associées au problème (P).
- 2) Dans quel cas ces conditions sont-elles suffisantes ?

Exercice I (15 min, 2 points)

Etudier les variations de la fonction ci-dessous :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \quad x > 0$$

En déduire que pour tout $x > 0$, $f(x) \geq \sqrt{2}$.

Exercice II (25 min, 4 points)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Montrer que la suite est à termes strictement positifs.
- 3) Montrer que la suite est minorée par $\sqrt{2}$.
- 4) Etudier les variations de la suite.
- 5) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.
- 6) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice III (25 min, 4 points)

On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer que la série $(\sum u_n)_n$ converge.
- 2) Vérifier que

$$u_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right]$$

- 3) En déduire la somme de la série.

Exercice IV (25 min, 4 points)

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-1/t} dt \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$$

$$K = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}+1}{t} dt \quad L = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Exercice V (20 min, 3 points)

Soit Δ le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$ et I l'intégrale double définie par

$$I = \iint_{\Delta} 6xy \, dx \, dy$$

- 1) Représenter le domaine Δ .
- 2) Calculer l'intégrale I .