Faculté de Droit & des Sciences Économiques — Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2025-2026

Session 1 **Semestre 2**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (15 min, 3 points)
On considère la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.
1) On calcule l'élasticité de f en x :

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2} \implies Ef(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)} = x\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}} = 2x^2$$

2) En $x = 1$, $Ef(1) = 2 > 1$. La fonction est donc élastique en $x = 1$. Si x varie de 1 % alors $f(x)$ varie de plus de 1 % (environ 2 %).
En $x = 1/2$, $Ef(1/2) = 1/2 < 1$. La fonction est donc inélastique en $x = 1/2$. Si x varie de 1 % alors $f(x)$ varie de moins de 1 % (environ 0.5 %).

Exercice II (20 min, 3 points)
On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$.
1) Pour que $f(x)$ soit définie, il faut que le dénominateur de la fraction soit non-nul, c'est-à-dire $1 - x \neq 0 \iff x \neq 1$. Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2) Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 est

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

3) On en déduit

$$\frac{1}{1-x} = 1 - (-x) + (-x)^2 + x^2\varepsilon(x) = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

D'où

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = x(1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)) = x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

4) Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 + x + x\varepsilon(x) = 1$$

Exercice III (25 min, 4 points)
On remarque que $\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)' = 2x\mathrm{e}^{x^2}$. D'où

$$I = \int_0^1 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1$$

Pour calculer J, on effectue une intégration par parties en posant $u = \ln(x)$ et $v' = 4x^3$. D'où $u' = 1/x$ et $v = x^4$.

$$J = \int_1^{\mathrm{e}} 4x^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^4 \ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x^4 \tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = e^4 - \int_1^{\mathrm{e}} x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^4 - \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{3\mathrm{e}^4 + 1}{4}$$

Pour calculer K, on effectue le changement de variable $t = \sqrt{x-5}$. On a donc $x = t^2 + 5$ et $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. En outre, lorsque x varie de 6 à 9, t varie de 1 à 2. D'où

$$K = \int_6^9 \frac{x}{\sqrt{x-5}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{t^2+5}{t} 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 2t^2 + 10\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^3 + 10t\right]_1^2 = \frac{44}{3}$$

Exercice IV (10 min, 2 points)
Soit $X = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

1) La norme de X est $\|X\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
2) On cherche un vecteur $Y = (x, y)'$ tel que

$$\begin{cases} X \cdot Y = 0 \\ \|Y\| = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1x + 2y = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ (-2y)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ y^2 = 1/5 \end{cases}$$

On peut donc prendre $y = 1/\sqrt{5}$ et $x = -2/\sqrt{5}$, soit $Y = \begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$.

Exercice V (35 min, 5 points)
On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) On a

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3(4-1) = 9 \neq 0$$

Donc la matrice A est inversible.
2) On a

$$A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 8 & 9 & -8 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 8 & 12 & -8 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -3I_3$$

3) On a

$$A^2 - 4A = -3I_3 \implies A(A - 4I_3) = -3I_3 \implies A\left(\frac{A - 4I_3}{-3}\right) = I_3$$

Donc

$$A^{-1} = \frac{A - 4I_3}{-3} = \frac{1}{3}(4I_3 - A) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$