Faculté de Droit & des Sciences Économiques
Université de Limoges

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2025-2026

Session 1 **Semestre 1**

Licence Économie-Gestion – 1re année

Matière : Mathématiques appliquées – Éléments de correction **Durée :** 2 heures
Enseignant : Vincent Jalby

Exercice I (30 min, 5 points)
On considère la fonction $f(x) = 1 + 12x^2 + 4x^3 - 3x^4$.

1) On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -3x^4 = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -3x^4 = -\infty$$

2) $f'(x) = 24x + 12x^2 - 12x^3$ et $f''(x) = 24 + 24x - 36x^2$.

3) On cherche les points critique en utilisant la condition nécessaire d'optimalité :

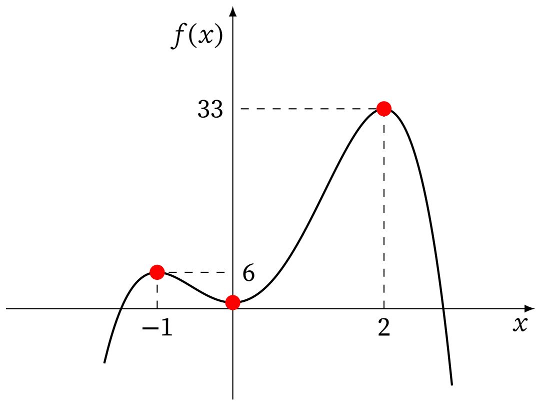
$$f'(x) = 0 \iff 24x + 12x^2 - 12x^3 = 0 \iff 2x + x^2 - x^3 = 0 \iff x(2 + x - x^2) = 0 \iff x = 0, -1 \text{ ou } +2$$

La fonction possède donc 3 points critiques : $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. On utilise alors des conditions suffisantes d'optimalité pour déterminer leur nature :

- $x_1 = 0$, $f''(0) = 24 > 0$. La fonction f admet un minimum (local) en 0.
- $x_2 = -1$, $f''(-1) = -36 < 0$. La fonction f admet un maximum (local) en -1.
- $x_3 = +2$, $f''(2) = -72 < 0$. La fonction f admet un maximum (local) en 2.

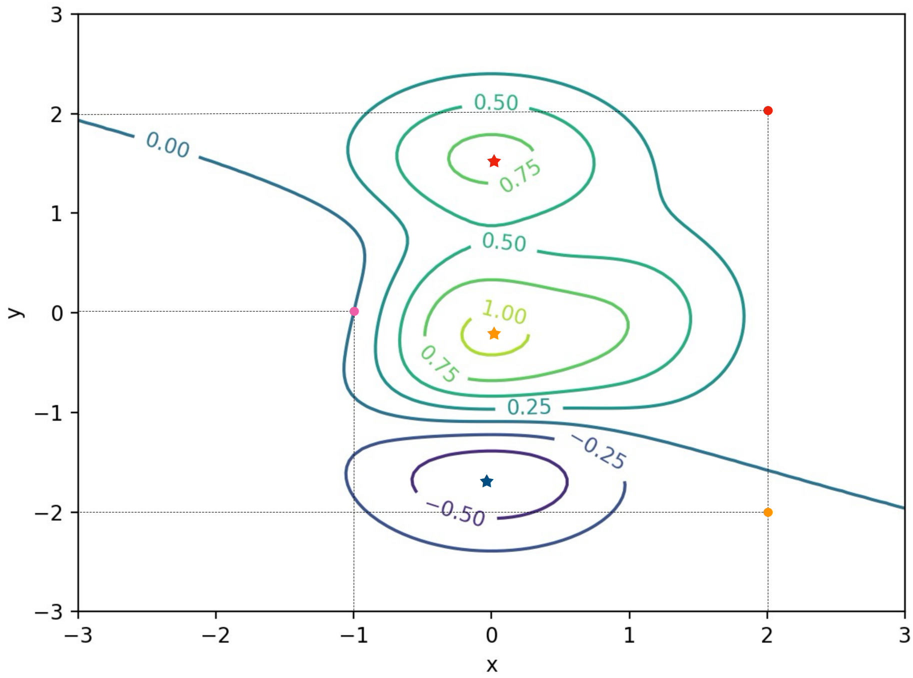
4) Tableau de variation et le graphe de $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	1	↗	33	↘	$-\infty$



5) On voit sur le tableau de variations et sur le graphe que f admet un maximum **local** en $x = -1$, un minimum **local** en $x = 0$ et un maximum **global** en $x = 2$.

Exercice II (20 min, 4 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables dont les courbes de niveau sont représentées dans le graphique suivant :



1) On observe d'abord la ligne de niveau 0, de gauche à droite. Le point (rose) $(-1, 0)$ se trouvant sur cette ligne, la fonction $f(-1, 0) = 0$. Au dessus de cette ligne, les lignes de niveaux « vertes » correspondent à des niveaux positifs (0.25, 0.50, 0.75) : dans la zone supérieure, la fonction f prend donc des valeurs positives. C'est en particulier le cas pour le point (rouge) $(2, 2)$; donc $f(2, 2) > 0$. De même dans la zone inférieure, les lignes de niveaux « bleus » correspondent à des niveaux négatifs (-0.25, -0.50) ; la fonction f prend donc des valeurs négatives. C'est en particulier le cas pour le point (orange) $(2, -2)$; donc $f(2, -2) < 0$.

2) Dans la partie basse, on voit des niveaux (négatifs) concentriques qui semblent indiquer un minimum, a priori global au point (étoile bleu), approximativement $(0, -1.75)$. La fonction admet certainement un minimum global en ce point.

Dans la partie haute, on observe deux groupes de lignes de niveaux (positifs) concentriques autour du point (étoile rouge), approximativement $(0, 1.75)$ et du point (étoile orange), approximativement $(0, -0.2)$. La fonction admet certainement un maximum local au premier point et un maximum global au second point.

Exercice III (30 min, 5 points)
On considère la fonction de deux variables suivante :

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

1) L'expression $1/x$ n'est pas définie en $x = 0$ et $1/y$ n'est pas définie en $y = 0$. D'où $D_f = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

2) Les dérivées partielles de f sont

$$f'_x(x, y) = y - \frac{1}{x^2} \quad \begin{cases} f''_{x^2}(x, y) = \dfrac{2}{x^3} \\ f''_{xy}(x, y) = 1 \end{cases} \qquad f_y(x, y) = x + \frac{1}{y^2} \quad \begin{cases} f''_{yx}(x, y) = 1 \\ f''_{x^2}(x, y) = \dfrac{-2}{y^3} \end{cases}$$

3) Le(s) point(s) critique(s) de f sont donnés par les CNO :

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ x + \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ x + x^4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ x(1 + x^3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \text{nd ou } y = +1 \\ x = 0 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

La fonction $f(x, y)$ n'étant pas définie en $x = 0$, elle admet un seul point critique $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

4) Au point critique, la matrice hessienne et le hessien sont :

$$H_f(-1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \implies \det H_f(-1, 1) = 4 - 1 = 3$$

Comme $\det H_f(-1, 1) = 3 > 0$, $f''_{x^2}(-1, 1) = -2 < 0$ et $f''_{y^2}(-1, 1) = -2 < 0$, la fonction f admet un maximum local au point $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

Exercice IV (40 min, 6 points)
On souhaite résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(P)\ \begin{cases}\text{Optimiser } f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 3xy + 2y \\ \text{sous la contrainte } y - 2x = 8\end{cases}$$

1) Etude de la convexité de f

a) Les dérivées partielles de f sont

$$f'_x(x,y) = 8x - 3y \quad \begin{cases} f''_{x^2}(x,y) = 8 \\ f''_{xy}(x,y) = -3 \end{cases} \qquad f_y(x,y) = 2y - 3x + 2 \quad \begin{cases} f''_{yx}(x,y) = -3 \\ f''_{x^2}(x,y) = 2 \end{cases}$$

b) La hessienne et le hessien de f sont donc

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det H_f(x,y) = 16 - 9 = 7$$

c) Comme le hessien $\det H_f(x,y) = 7$ et les dérivées partielles secondes $f''_{x^2}(x,y) = 8$ et $f''_{y^2}(x,y) = 2$ sont positifs, on en déduit que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2) Résolution du problème (P)

a) Le lagrangien associé à (P) est $L(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 3xy + 2y + \lambda(y - 2x - 8)$. Les CNO sont

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x - 3y - 2\lambda = 0 \\ 2y - 3x + 2 + \lambda = 0 \\ y - 2x - 8 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x - 3y - 2\lambda = 0 \\ 2y - 3x + 2 + \lambda = 0 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x - 3(2x+8) - 2\lambda = 0 \\ 2(2x+8) - 3x + 2 + \lambda = 0 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 2\lambda = 24 \\ x + \lambda = -18 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x - \lambda = 12 \\ x + \lambda = -18 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = -6 \\ \lambda = -x - 18 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ \lambda = -15 \\ y = 2 \end{cases}$$

Le problème (P) admet donc un point critique $(x_0, y_0) = (-3, 2)$ avec $\lambda_0 = -15$.

b) La fonction f étant convexe et la fonction contrainte $(y-2x-8)$ étant affine, le problème (P) admet un minimum global en $(x_0, y_0) = (-3, 2)$.